

composée d'un très grand nombre de petits contournements du chemin direct. Ces contournements ont pour effet de diluer la difficulté du parcours et rendent ainsi le nouveau chemin praticable.

Un exemple très simple de problème « impossible » résolu par cette stratégie est la conception d'une route joignant les extrémités d'un segment vertical, mais dont la pente soit très faible afin qu'un véhicule puisse l'emprunter. Pour des questions de place, on exige également que cette route ne s'éloigne pas trop du segment vertical, par exemple qu'elle soit contenue dans un tube relativement petit entourant le segment.

Un premier raisonnement fait apparaître un interdit imaginaire: si la pente est presque horizontale, la route s'élève très doucement et devrait être hors du petit tube quand elle atteindra l'altitude de l'extrémité supérieure. Or cet interdit se contourne facilement et la solution est effectivement mise en pratique dans la vie quotidienne: c'est la rampe d'accès à un parking à étages! Même si la pente est très faible, l'effet du parcours de chaque boucle est un pur déplacement vertical. Les boucles imposées à la route permettent donc de réaliser la même élévation verticale que le chemin direct, le segment, tout en offrant un parcours « praticable ».

Un effet de moyenne

D'un point de vue mathématique, le problème « impossible » que résout la rampe d'accès est de nature différentielle. En effet, l'une des deux contraintes porte sur une pente, qui se calcule au moyen d'une dérivée. Pour un tel problème, l'intégration convexe construit une solution – ici, une courbe en hélice – qui respecte également la seconde contrainte, celle de rester à l'intérieur d'un tube.

Pour ce faire, la théorie profite ingénieusement des effets de moyenne. Chaque fois que l'on parcourt une boucle sur l'hélice, l'extrémité du vecteur dérivé (un vecteur tangent à la courbe), translaté en l'origine, décrit un cercle horizontal de faible altitude. La moyenne sur une boucle du vecteur dérivé est donc un vecteur vertical de faible amplitude. Par conséquent, l'hélice, que l'on peut obtenir par intégration de son propre vecteur dérivé, reste proche d'un segment, lui-même obtenu en intégrant le vecteur vertical. L'hélice se retrouve ainsi contenue dans un tube dont l'axe est le segment. Cet effet de moyenne constitue le cœur de la théorie. Or déterminer une moyenne revient

Contournements

La théorie de l'intégration convexe offre en géométrie différentielle une façon d'atteindre un résultat *a priori* inaccessible au moyen d'un grand nombre de petits contournements. Dans l'exemple de la rampe d'accès à un parking à étages, les contournements prennent la forme de boucles. Ils permettent de joindre deux points situés sur une même verticale en suivant une trajectoire de pente très faible.



Afinos99

à réaliser une intégration. Et le résultat de cette intégration se trouve nécessairement à l'intérieur de la courbe suivie par le vecteur dérivé, c'est-à-dire dans son enveloppe convexe. Ce qui explique pourquoi la théorie porte le nom d'intégration convexe.

La théorie de l'intégration convexe constitue pour la géométrie différentielle un outil puissant. Son application au « retournement de la sphère » en est une illustration. Depuis la fin des années 1950, on sait grâce aux travaux de l'Américain Stephen Smale qu'il est possible de déformer continûment et sans pincements une sphère, dont on a peint l'extérieur et l'intérieur de couleurs différentes, jusqu'à obtenir une nouvelle sphère dont les couleurs sont interchangées (dans cette opération, on accepte que la surface s'interpénètre). À ce résultat déjà étonnant, la théorie de l'intégration convexe a ajouté que le retournement peut être effectué isométriquement, c'est-à-dire en préservant toutes les longueurs au cours de la déformation!

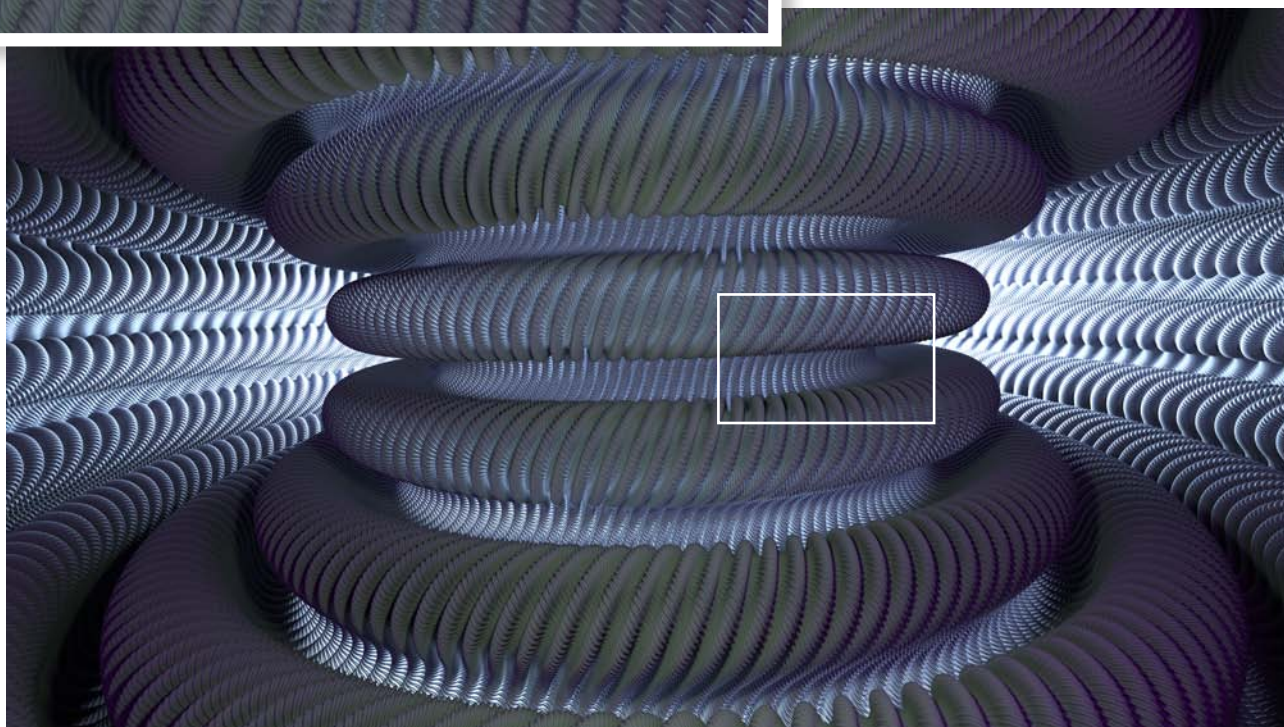
Avec l'invention de l'intégration convexe, la construction des plongements isométriques à la Nash devient subitement intelligible. Elle perd son caractère singulier pour apparaître comme un cas particulier d'une théorie plus vaste. Pourtant, si le procédé de construction s'éclaire, l'objet obtenu *in fine* garde sa part de mystère et continue à défier l'imagination par le caractère paradoxal de ses propriétés. Comment une surface peut-elle présenter une lissité sans faille et cependant réserver un champ d'à-coups à quiconque s'aviserait de la dévaler? Quel peut être l'aspect d'un plongement isométrique du tore carré plat?

En 2006, dans l'espoir de répondre à ces questions, nous trois et Saïd Jabrane, un doctorant en mathématiques, avons formé une équipe, complétée en 2012 par Damien Rohmer, spécialiste de la synthèse d'images. Notre conviction était que l'on pouvait tirer profit du caractère algorithmique de l'intégration convexe – une propriété passée jusque-là inaperçue – pour concevoir un programme informatique visualisant un plongement isométrique du tore carré plat. Cette conviction était fondée, mais six ans ont été nécessaires pour visualiser un seul de ces fameux plongements...

Le programme que nous avons réalisé débute avec une surface-bouée et la déforme progressivement au moyen d'une succession d'ondulations de plus en plus fines. La bouée initiale est choisie suffisamment petite



5. LE PLONGEMENT ISOMÉTRIQUE du tore carré plat dans l'espace euclidien à trois dimensions est possible, à condition de relâcher un peu les contraintes de régularité. On obtient ainsi une surface, ici vue de l'intérieur, qui a une infinité de corrugations de plus en plus petites, comme l'illustre l'agrandissement.



pour que toutes les longueurs mesurées à sa surface soient trop courtes par rapport à leurs analogues sur le tore carré plat. Par exemple, la longueur des latitudes sur la bouée est plus courte que celle des horizontales correspondantes sur le tore carré plat.

Des corrugations à toutes les échelles

Pour corriger ce défaut, le programme crée des ondulations le long des latitudes qui accroissent leur longueur. Ces ondulations, nommées corrugations, sont les «petits contournements» qui témoignent de l'usage de l'intégration convexe. Elles sont appliquées dans différentes directions afin d'augmenter toutes les longueurs. Au cours du procédé, l'amplitude des corrugations diminue, tandis que leur fréquence augmente (voir la figure 4). Le tout est précisément calculé pour réduire continuellement

le défaut isométrique et obtenir à la limite un plongement isométrique. Bien sûr, le programme ne peut effectuer qu'un nombre fini de tâches et, dans la pratique, il suffit de l'arrêter après quatre étapes pour que le résultat visuel soit satisfaisant.

L'image obtenue est surprenante (voir les figures 1 et 5) : elle révèle une surface qui ressemble à s'y méprendre à une fractale, c'est-à-dire à un objet infiniment fracturé quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe. Toutefois, cette ressemblance n'est pas totale. En effet, le plongement isométrique est infiniment ondulé plutôt qu'infiniment fracturé. Où que se pose le regard, aucune brisure ou arête n'apparaît ; les fractures ont été remplacées par des corrugations. L'objet obtenu n'est donc pas tout à fait une fractale, ni une surface au sens ordinaire. Situé à la frontière entre les deux, il permet de résoudre le paradoxe posé par les surfaces de Nash-Kuiper en conciliant

lissité et rugosité. Nous l'avons qualifié de fractale C^1 , ou fractale lisse.

Après le tore carré plat, nous pouvons dorénavant espérer visualiser les plongements isométriques dans l'espace tridimensionnel d'autres surfaces riemanniennes. On pense notamment au «disque de Poincaré», un exemple célèbre de géométrie non euclidienne sur le plan. De telles visualisations feront sans doute apparaître des structures analogues à celle obtenue avec le tore carré plat, c'est-à-dire des fractales C^1 .

Les fractales lisses, chaînon manquant entre les fractales et les surfaces ordinaires, vont probablement surgir dans d'autres questions mathématiques. Ces structures joueront-elles également un rôle en physique, en chimie ou dans les sciences du vivant ? Il est fort probable que certaines des structures fractales déjà observées dans le monde physique sont en réalité des fractales C^1 ... et que l'on en découvrira d'autres. ■



Évolution

Le plus étrange des oiseaux

Ewan Fordyce et Daniel Ksepka

L'ESSENTIEL

- Les manchots ne peuvent voler, mais ils sont d'excellents nageurs et plongeurs. On cherche à savoir comment ils ont développé de telles caractéristiques et comment certains se sont adaptés aux froids extrêmes.
- Des fossiles récemment découverts permettent de reconstituer leur évolution, révélant que certains traits se sont développés sous un climat chaud.
- Bien qu'ils aient survécu à 60 millions d'années de changements climatiques, les manchots risquent de succomber au réchauffement actuel.