

52 cartes... ce qui le remet en ordre. Pour le *Faro Out*, le nombre k de fois qu'il faut opérer le mélange pour revenir à l'ordre initial dépend du nombre n de cartes. Il est donné par la liste $\{n, k\} = \{2, 1\}, \{4, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 3\}, \{10, 6\}, \{12, 10\}, \{14, 12\}, \{16, 4\}, \{18, 8\}, \{20, 18\}, \{22, 6\}, \{24, 11\}, \{26, 20\}, \{28, 18\}, \{30, 28\}, \{32, 5\}, \{34, 10\}, \{36, 12\}, \{38, 36\}, \{40, 12\}, \{42, 20\}, \{44, 14\}, \{46, 12\}, \{48, 23\}, \{50, 21\}, \{52, 8\}$.

Vous complétez ce tableau si vous le voulez en sachant que si n est pair, le temps de retour pour le mélange *Faro Out* est le plus petit entier k tel que $2^k - 1$ soit un multiple de $n - 1$.

Quel que soit le nombre de cartes, le *Faro Out* opéré de manière répétitive ramène toujours l'ordre initial et cette propriété est vraie pour tout mélange déterministe. En répétant le même mélange déterministe, quel qu'il soit, vous finissez toujours par retrouver le paquet tel qu'il était avant de commencer. Cette propriété résulte de ce

que l'on sait en théorie des groupes depuis le XIX^e siècle.

La méthode générale pour calculer le temps de retour d'un mélange déterministe n'est pas compliquée : on repère la taille des cycles du mélange (avec huit cartes, pour le *Faro Out*, la carte 2 passe en position 3, puis en position 5, puis revient en position 2 : elle décrit un cycle d'ordre 3) et on calcule le plus petit commun multiple des cycles.

Déplacements contrôlés

Cependant, ce résultat n'est qu'un point de départ et une théorie complète des mélanges *Faro Out* et *Faro In* n'a été formulée qu'en 1983 par Persi Diaconis, Ron Graham et William Kantor. Parmi les propriétés des mélanges déterministes *Faro Out* et *Faro In*, celle-ci est très jolie et sert de base à divers tours de magie. En enchaînant les mélanges *Faro Out* et *Faro In* de manière appropriée, on déplacera la carte située au-

dessus du paquet pour qu'elle se retrouve en position n . La méthode est la suivante. On décompose en base 2 l'entier $n - 1$. Ainsi, pour $n = 7$, $n - 1$, soit 6, s'écrit 110. Pour déplacer la carte du dessus vers la position n , on lit les 1 de la décomposition en base 2 comme des *In* et les 0 comme des *Out*. Pour 110, la consigne est donc de faire, dans l'ordre, les opérations *Faro In*, *Faro In*, *Faro Out*. Vérification : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \xrightarrow{\text{Faro In}} \{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4\} \xrightarrow{\text{Faro In}} \{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2\} \xrightarrow{\text{Faro Out}} \{7, 8, 5, 6, 3, 4, 1, 2\}$. La carte du dessus est passée en position 7.

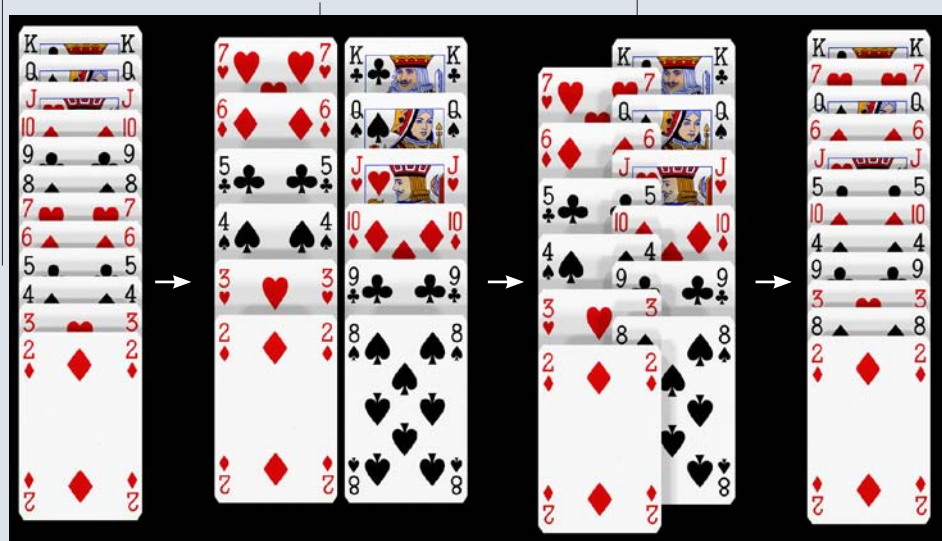
Le problème inverse, posé par le Britannique Alex Elmsley (le découvreur de cette méthode pour déplacer la carte du dessus), est resté irrésolu plus de 30 ans. Dans quel ordre faut-il exécuter les *Faro Out* et *Faro In* de façon à déplacer la carte située en position n vers le dessus ? La solution générale n'a été donnée qu'en 2007 par P. Diaconis et R. Graham. Elle est un peu trop compliquée pour être décrite ici... et surtout

Les mélanges *Faro Out* et *Faro In*

Le mélange de cartes *Faro Out* (ou *Pharaon*) est le mélange déterministe qui consiste à intercaler parfaitement la moitié supérieure du paquet dans la moitié inférieure en s'arrangeant pour que la première carte du paquet reste la première carte après le mélange (si elle passe en second, il s'agit du *Faro In*). Bien que difficile à réaliser, de nombreux prestidigitateurs et quelques mathématiciens réussissent la séparation parfaite en deux paquets ayant le même nombre de cartes, suivie de l'insertion parfaite des deux moitiés.

Comme pour tous les mélanges où aucun hasard n'intervient, en opérant le mélange *Faro Out* plusieurs fois, on finit par reconstituer l'ordre initial du paquet. Pour un jeu de 52 cartes, il faut opérer huit fois de suite.

Ce mélange a été utilisé pour tricher. Une première mention en est faite dans le livre anonyme *Whole Art and Mystery of Modern Gaming* paru à Londres en 1726. Aux États-Unis, il est expliqué dans des livres



de tricherie en 1843 à Cincinnati, et en 1860 à New York. L'idée d'utiliser les mélanges *Faro* dans des tours de magie est mentionnée en 1919 dans un ouvrage de C.T. Jordan. Le mathématicien Paul Lévy s'y intéressa dans les années 1940-1950 et démontra que si le nombre de cartes est une

puissance de 2, disons 2^k , alors k mélanges *Faro Out* successifs ramènent au paquet initial.

Alex Elmsley, informaticien à Londres, découvrit en 1975 le procédé permettant de faire passer la carte du dessus à la position n . Une théorie complète de ces mélanges a été proposée en 1983

par Persi Diaconis, Ron Graham et William Kantor, mais ce n'est qu'en 2006 que P. Diaconis et R. Graham ont réussi à trouver, dans le cas général, la séquence de *Faro Out* et de *Faro In* permettant de déplacer la carte en position initiale n pour qu'elle aboutisse sur le dessus du paquet.