

52 cartes... ce qui le remet en ordre. Pour le *Faro Out*, le nombre k de fois qu'il faut opérer le mélange pour revenir à l'ordre initial dépend du nombre n de cartes. Il est donné par la liste $\{n, k\} = \{2, 1\}, \{4, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 3\}, \{10, 6\}, \{12, 10\}, \{14, 12\}, \{16, 4\}, \{18, 8\}, \{20, 18\}, \{22, 6\}, \{24, 11\}, \{26, 20\}, \{28, 18\}, \{30, 28\}, \{32, 5\}, \{34, 10\}, \{36, 12\}, \{38, 36\}, \{40, 12\}, \{42, 20\}, \{44, 14\}, \{46, 12\}, \{48, 23\}, \{50, 21\}, \{52, 8\}$.

Vous complétez ce tableau si vous le voulez en sachant que si n est pair, le temps de retour pour le mélange *Faro Out* est le plus petit entier k tel que $2^k - 1$ soit un multiple de $n - 1$.

Quel que soit le nombre de cartes, le *Faro Out* opéré de manière répétitive ramène toujours l'ordre initial et cette propriété est vraie pour tout mélange déterministe. En répétant le même mélange déterministe, quel qu'il soit, vous finissez toujours par retrouver le paquet tel qu'il était avant de commencer. Cette propriété résulte de ce

que l'on sait en théorie des groupes depuis le XIX^e siècle.

La méthode générale pour calculer le temps de retour d'un mélange déterministe n'est pas compliquée : on repère la taille des cycles du mélange (avec huit cartes, pour le *Faro Out*, la carte 2 passe en position 3, puis en position 5, puis revient en position 2 : elle décrit un cycle d'ordre 3) et on calcule le plus petit commun multiple des cycles.

Déplacements contrôlés

Cependant, ce résultat n'est qu'un point de départ et une théorie complète des mélanges *Faro Out* et *Faro In* n'a été formulée qu'en 1983 par Persi Diaconis, Ron Graham et William Kantor. Parmi les propriétés des mélanges déterministes *Faro Out* et *Faro In*, celle-ci est très jolie et sert de base à divers tours de magie. En enchaînant les mélanges *Faro Out* et *Faro In* de manière appropriée, on déplacera la carte située au-

dessus du paquet pour qu'elle se retrouve en position n . La méthode est la suivante. On décompose en base 2 l'entier $n - 1$. Ainsi, pour $n = 7$, $n - 1$, soit 6, s'écrit 110. Pour déplacer la carte du dessus vers la position n , on lit les 1 de la décomposition en base 2 comme des *In* et les 0 comme des *Out*. Pour 110, la consigne est donc de faire, dans l'ordre, les opérations *Faro In*, *Faro In*, *Faro Out*. Vérification : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \xrightarrow{\text{Faro In}} \{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4\} \xrightarrow{\text{Faro In}} \{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2\} \xrightarrow{\text{Faro Out}} \{7, 8, 5, 6, 3, 4, 1, 2\}$. La carte du dessus est passée en position 7.

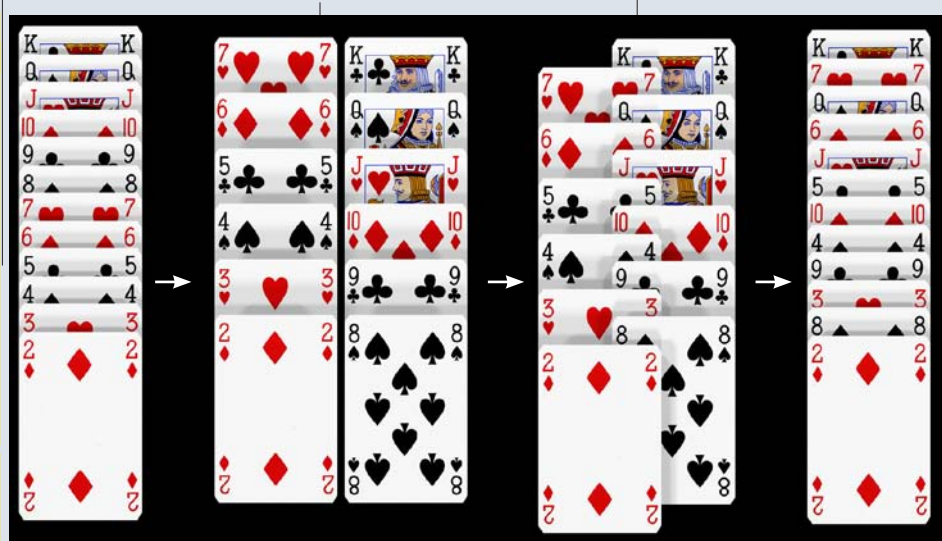
Le problème inverse, posé par le Britannique Alex Elmsley (le découvreur de cette méthode pour déplacer la carte du dessus), est resté irrésolu plus de 30 ans. Dans quel ordre faut-il exécuter les *Faro Out* et *Faro In* de façon à déplacer la carte située en position n vers le dessus ? La solution générale n'a été donnée qu'en 2007 par P. Diaconis et R. Graham. Elle est un peu trop compliquée pour être décrite ici... et surtout

Les mélanges *Faro Out* et *Faro In*

Le mélange de cartes *Faro Out* (ou *Pharaon*) est le mélange déterministe qui consiste à intercaler parfaitement la moitié supérieure du paquet dans la moitié inférieure en s'arrangeant pour que la première carte du paquet reste la première carte après le mélange (si elle passe en second, il s'agit du *Faro In*). Bien que difficile à réaliser, de nombreux prestidigitateurs et quelques mathématiciens réussissent la séparation parfaite en deux paquets ayant le même nombre de cartes, suivie de l'insertion parfaite des deux moitiés.

Comme pour tous les mélanges où aucun hasard n'intervient, en opérant le mélange *Faro Out* plusieurs fois, on finit par reconstituer l'ordre initial du paquet. Pour un jeu de 52 cartes, il faut opérer huit fois de suite.

Ce mélange a été utilisé pour tricher. Une première mention en est faite dans le livre anonyme *Whole Art and Mystery of Modern Gaming* paru à Londres en 1726. Aux États-Unis, il est expliqué dans des livres



de tricherie en 1843 à Cincinnati, et en 1860 à New York. L'idée d'utiliser les mélanges *Faro* dans des tours de magie est mentionnée en 1919 dans un ouvrage de C.T. Jordan. Le mathématicien Paul Lévy s'y intéressa dans les années 1940-1950 et démontra que si le nombre de cartes est une

puissance de 2, disons 2^k , alors k mélanges *Faro Out* successifs ramènent au paquet initial.

Alex Elmsley, informaticien à Londres, découvrit en 1975 le procédé permettant de faire passer la carte du dessus à la position n . Une théorie complète de ces mélanges a été proposée en 1983

par Persi Diaconis, Ron Graham et William Kantor, mais ce n'est qu'en 2006 que P. Diaconis et R. Graham ont réussi à trouver, dans le cas général, la séquence de *Faro Out* et de *Faro In* permettant de déplacer la carte en position initiale n pour qu'elle aboutisse sur le dessus du paquet.

Un casino mauvais joueur !

Battre les cartes est important, comme le montre l'histoire suivante arrivée en avril 2012 au casino *The Golden Nugget* à Atlantic City (ville réputée pour ses jeux sur la côte Est des États-Unis), qui risque de perdre 1,5 million de dollars au minibaccara. Le fournisseur de jeux de cartes du casino, qui ne devait livrer que des jeux bien mélangés, commit l'erreur d'enfourner qui ne l'étaient pas. Le croupier inattentif utilisa, sans s'apercevoir de son erreur, un paquet parfaitement classé. Des joueurs

remarquèrent la régularité des cartes qui sortaient et, en l'exploitant, gagnèrent 41 fois de suite (leurs mises allaient bien sûr en croissant). Les surveillants de la salle du jeu, voyant ces gains anormaux, se précipitèrent. Ils soupçonnèrent une subtile arnaque avant de comprendre, un peu tard, qu'il n'y en avait pas.

Le casino refusa de payer les gains des joueurs qui n'avaient pourtant enfreint aucune règle. Les tribunaux sont maintenant chargés de régler l'affaire, les joueurs réclamant leur dû. Le

casino se défend en prétextant que le jeu était illégal du fait que les cartes n'étaient pas mélangées, mais il attaque aussi le fournisseur de jeux de cartes qui a commis l'erreur initiale. L'avocat des joueurs avance, lui, l'argument qu'« il n'existe aucune loi de l'État du New Jersey permettant au *Golden Nugget* de déclarer le jeu nul parce qu'un jeu de cartes classé a été utilisé ». (Voir www.dailymail.co.uk/news/article-2191343/Casino-sues-gamblers-won-1-5m-unshuffled-cards.html.)



pour être pratiquée de tête par un magicien qui souhaiterait l'utiliser pour un tour ; elle constitue donc une méthode théorique de prestidigitation !

Venons-en aux véritables mélanges qui, parce qu'ils se fondent sur le hasard, ne sont pas utilisés par les tricheurs ou les prestidigitateurs, mais par les joueurs soucieux d'équité.

Cinq ou six mélanges probabilistes différents sont pratiqués autour des tables de jeu, sans compter les mélanges par machine. La méthode de loin la plus courante est le mélange américain ou mélange en queue-d'aronde. Il consiste à opérer comme pour le mélange pharaon, mais de manière imparfaite... ce qui est plus facile !

Après avoir séparé le paquet en deux parties A et B à peu près égales, on les insère l'une dans l'autre. Cela produit un nouveau paquet contenant dans l'ordre : quelques cartes du début de A, suivies de quelques cartes du début de B, suivies de quelques cartes de A (venant après celles déjà utili-

sées de A), suivies de quelques cartes de B (venant après celles déjà utilisées de B), etc. Cette méthode de mélange semble très bonne, car les nombreux petits paquets de cartes qui s'intercalent bouleversent totalement et de manière imprévisible l'ordre initial des cartes, et cela même si le mélange n'est effectué qu'une seule fois. Comment aller au-delà de cette impression, peut-être illusoire ?

Henri Poincaré a consacré huit sections de son livre *Calcul des probabilités* de 1912 au problème du mélange des cartes. Il y propose un résultat général concernant les mélanges aléatoires et qui s'applique donc au mélange américain. Poincaré établit qu'à la longue, ces mélanges désordonnent vraiment un jeu. Le nombre de façons dont on peut ordonner n cartes est égal à $n(n-1)(n-2)\dots 1$, produit noté $n!$ (« factorielle n »). Un jeu est bien battu quand aucun ordre particulier de cartes n'est plus probable qu'un autre. Par une méthode qui anticipe ce que l'on nommera « les chaînes

de Markov », Poincaré démontre que plus on effectue un mélange probabiliste, plus la probabilité que le paquet de n cartes soit dans un ordre donné s'approche de $1/n!$. Conformément à l'intuition de tout joueur de cartes, un mélange aléatoire effectué avec suffisamment d'application produit exactement ce qu'on attend : un choix équitable entre tous les ordres possibles du paquet de cartes.

Malheureusement, Poincaré n'indique rien sur la vitesse avec laquelle les probabilités des différents ordres s'approchent de $1/n!$; ses travaux ne nous informent donc pas sur le nombre de mélanges à effectuer en pratique avant de pouvoir s'arrêter quand on est à la table de jeu. Les mathématiciens français Émile Borel, Jacques Hadamard et Paul Lévy se sont aussi intéressés aux problèmes du mélange d'un paquet de cartes. Borel, sans en produire de démonstration, formula l'idée que pour bien mélanger un jeu de 52 cartes, sept mélanges américains suffisent.

Un modèle mathématique du mélange américain

La théorie mathématique permettant de prouver rigoureusement cette affirmation ne viendra que progressivement de travaux plus tardifs que nous allons décrire. Le nom de Persi Diaconis, cet extraordinaire mathématicien américain qui commença sa vie comme illusionniste professionnel et la poursuivit comme professeur de statistiques à l'Université de Stanford, reviendra souvent.

Le premier pas vers l'évaluation précise du nombre de mélanges à effectuer est dû aux Américains Edgar Gilbert et Claude Shannon qui décrivent en 1955 un modèle réaliste de ce qui se passe quand on effectue une opération de mélange américain. Ils proposent que le paquet est séparé en deux paquets (généralement inégaux) de p et p' cartes ($p + p' = n$) avec la probabilité $C(n, p)/2^n$, où $C(n, p)$ est le célèbre coefficient du binôme de Newton, égal à $n!/[p!(n-p)!]$. Cette hypothèse sur la probabilité de séparer un paquet en deux correspond à la densité dite binomiale (ou « courbe en cloche ») qui est considérée comme la plus vraisemblable pour un phénomène de cette nature.