

Un casino mauvais joueur !

Battre les cartes est important, comme le montre l'histoire suivante arrivée en avril 2012 au casino *The Golden Nugget* à Atlantic City (ville réputée pour ses jeux sur la côte Est des États-Unis), qui risque de perdre 1,5 million de dollars au minibaccara. Le fournisseur de jeux de cartes du casino, qui ne devait livrer que des jeux bien mélangés, commit l'erreur d'en fournir qui ne l'étaient pas. Le croupier inattentif utilisa, sans s'en apercevoir de son erreur, un paquet parfaitement classé. Des joueurs

remarquèrent la régularité des cartes qui sortaient et, en l'exploitant, gagnèrent 41 fois de suite (leurs mises allaient bien sûr en croissant). Les surveillants de la salle du jeu, voyant ces gains anormaux, se précipitèrent. Ils soupçonnèrent une subtile arnaque avant de comprendre, un peu tard, qu'il n'y en avait pas.

Le casino refusa de payer les gains des joueurs qui n'avaient pourtant enfreint aucune règle. Les tribunaux sont maintenant chargés de régler l'affaire, les joueurs réclamant leur dû. Le

casino se défend en prétextant que le jeu était illégal du fait que les cartes n'étaient pas mélangées, mais il attaque aussi le fournisseur de jeux de cartes qui a commis l'erreur initiale. L'avocat des joueurs avance, lui, l'argument qu'« il n'existe aucune loi de l'État du New Jersey permettant au *Golden Nugget* de déclarer le jeu nul parce qu'un jeu de cartes classé a été utilisé ». (Voir www.dailymail.co.uk/news/article-2191343/Casino-sues-gamblers-won-1-5m-unshuffled-cards.html.)



pour être pratiquée de tête par un magicien qui souhaiterait l'utiliser pour un tour ; elle constitue donc une méthode théorique de prestidigitation !

Venons-en aux véritables mélanges qui, parce qu'ils se fondent sur le hasard, ne sont pas utilisés par les tricheurs ou les prestidigitateurs, mais par les joueurs soucieux d'équité.

Cinq ou six mélanges probabilistes différents sont pratiqués autour des tables de jeu, sans compter les mélanges par machine. La méthode de loin la plus courante est le mélange américain ou mélange en queue-d'aronde. Il consiste à opérer comme pour le mélange pharaon, mais de manière imparfaite... ce qui est plus facile !

Après avoir séparé le paquet en deux parties A et B à peu près égales, on les insère l'une dans l'autre. Cela produit un nouveau paquet contenant dans l'ordre : quelques cartes du début de A, suivies de quelques cartes du début de B, suivies de quelques cartes de A (venant après celles déjà utili-

sées de A), suivies de quelques cartes de B (venant après celles déjà utilisées de B), etc. Cette méthode de mélange semble très bonne, car les nombreux petits paquets de cartes qui s'intercalent bouleversent totalement et de manière imprévisible l'ordre initial des cartes, et cela même si le mélange n'est effectué qu'une seule fois. Comment aller au-delà de cette impression, peut-être illusoire ?

Henri Poincaré a consacré huit sections de son livre *Calcul des probabilités* de 1912 au problème du mélange des cartes. Il y propose un résultat général concernant les mélanges aléatoires et qui s'applique donc au mélange américain. Poincaré établit qu'à la longue, ces mélanges désordonnent vraiment un jeu. Le nombre de façons dont on peut ordonner n cartes est égal à $n(n-1)(n-2)\dots 1$, produit noté $n!$ (« factorielle n »). Un jeu est bien battu quand aucun ordre particulier de cartes n'est plus probable qu'un autre. Par une méthode qui anticipe ce que l'on nommera « les chaînes

de Markov », Poincaré démontre que plus on effectue un mélange probabiliste, plus la probabilité que le paquet de n cartes soit dans un ordre donné s'approche de $1/n!$. Conformément à l'intuition de tout joueur de cartes, un mélange aléatoire effectué avec suffisamment d'application produit exactement ce qu'on attend : un choix équitable entre tous les ordres possibles du paquet de cartes.

Malheureusement, Poincaré n'indique rien sur la vitesse avec laquelle les probabilités des différents ordres s'approchent de $1/n!$; ses travaux ne nous informent donc pas sur le nombre de mélanges à effectuer en pratique avant de pouvoir s'arrêter quand on est à la table de jeu. Les mathématiciens français Émile Borel, Jacques Hadamard et Paul Lévy se sont aussi intéressés aux problèmes du mélange d'un paquet de cartes. Borel, sans en produire de démonstration, formula l'idée que pour bien mélanger un jeu de 52 cartes, sept mélanges américains suffisent.

Un modèle mathématique du mélange américain

La théorie mathématique permettant de prouver rigoureusement cette affirmation ne viendra que progressivement de travaux plus tardifs que nous allons décrire. Le nom de Persi Diaconis, cet extraordinaire mathématicien américain qui commença sa vie comme illusionniste professionnel et la poursuivit comme professeur de statistiques à l'Université de Stanford, reviendra souvent.

Le premier pas vers l'évaluation précise du nombre de mélanges à effectuer est dû aux Américains Edgar Gilbert et Claude Shannon qui décrivent en 1955 un modèle réaliste de ce qui se passe quand on effectue une opération de mélange américain. Ils proposent que le paquet est séparé en deux paquets (généralement inégaux) de p et p' cartes ($p + p' = n$) avec la probabilité $C(n, p)/2^n$, où $C(n, p)$ est le célèbre coefficient du binôme de Newton, égal à $n!/[p!(n-p)!]$. Cette hypothèse sur la probabilité de séparer un paquet en deux correspond à la densité dite binomiale (ou « courbe en cloche ») qui est considérée comme la plus vraisemblable pour un phénomène de cette nature.

Si par exemple vous séparez en deux un paquet de huit cartes, cette loi binomiale indique que vous aurez la séparation 4-4 dans 27,4 % des cas, la séparation 3-5 (ou 5-3) dans 21,9 % des cas, la séparation 2-6 (ou 6-2) dans 10,9 % des cas, la séparation 1-7 (ou 7-1) dans 3,1 % des cas, et la séparation 0-8 (ou 8-0) dans 0,4 % des cas. Le dernier cas est un peu étrange, mais l'exclure ne changerait pas grand-chose.

Pour l'insertion des deux paquets obtenus l'un dans l'autre, le modèle de Gilbert et Shannon est, à nouveau, aussi simple et naturel que possible : lorsqu'on intercale un paquet A de p cartes dans un paquet B de p' cartes, la probabilité pour que la première carte du nouveau paquet soit la carte au-dessus de A est $p/(p+p')$, et elle est de $p'/(p+p')$ que ce soit la carte au-dessus de B. La même idée est reprise quand une ou plusieurs cartes sont déjà déterminées en tête du nouveau paquet, et qu'il reste à insérer deux paquets devenus plus petits.

Des expériences réalisées par P. Diaconis en 1988 ont confirmé que le modèle de Gilbert et Shannon est satisfaisant et constitue donc une bonne modélisation mathématique, un peu idéalisée mais pas trop, de ce qu'on fait quand on effectue le mélange américain. Restait à exploiter ce modèle pour évaluer le nombre de mélanges nécessaires à une mise en désordre convenable du jeu de cartes.

La solution a été publiée en 1992 par Dave Bayer et P. Diaconis (toujours lui !). Elle se fonde sur une élégante idée mathématique. D'abord, on considère une généralisation du mélange américain et de son modèle théorique : au lieu de séparer le paquet initial en deux, on le sépare en a sous-paquets qui sont ensuite insérés simultanément les uns dans les autres. Plus précisément, le nouveau paquet est constitué en prenant les cartes une à une avec des probabilités proportionnelles aux nombres de cartes de chaque paquet. Le modèle mathématique de cette généralisation reprend les mêmes idées que pour le mélange américain avec une séparation en deux. Un tel mélange, qui demanderait en pratique de disposer de a mains, se dénomme a -mélange américain.

Ensuite, et c'est la clef de tout, les chercheurs ont montré qu'effectuer un a -mélange américain suivi d'un b -mélange américain équivaut à réaliser un ab -mélange américain. Ce beau résultat permet d'affirmer que réaliser k fois un mélange américain habituel (c'est-à-dire un 2-mélange américain) revient à effectuer un 2^k -mélange américain. Grâce à cette vision simplifiée de ce qu'est l'opération de mélange américain répétée k fois, il devient possible de connaître la probabilité exacte que k mélanges américains consécutifs produisent un ordre donné, ce qui permet alors de savoir si l'on s'est assez approché du mélange idéal, où chaque ordre possible a une probabilité $1/n$!.

Une formule inattendue

La formule mesurant la qualité du mélange obtenu après un a -mélange américain est remarquable et il est même étonnant qu'une formule aussi simple existe pour décrire l'effet d'une manipulation plutôt compliquée. Voici le résultat et la formule :

La probabilité d'obtenir l'ordre Q , par exemple $Q = [3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$, après un a -mélange américain d'un paquet de n cartes est : $C(a+n-sm(Q), n)/a^n$.

Dans cette formule, C désigne comme précédemment les coefficients du binôme de Newton et $sm(Q)$ est le nombre de suites montantes dans la décomposition de Q en suites montantes. Pour notre exemple, $sm(Q)$ vaut 4, car $[3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$ se décompose en quatre suites montantes : $[3, 8]$, $[5]$, $[2, 4, 6, 7]$, $[1]$.

Voyons une application de la belle formule de Bayer et Diaconis. Partant d'un paquet classé $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ et opérant un 2-mélange américain trois fois de suite, ce qui équivaut à un 8-mélange américain (donc $a=8$), on obtiendra l'ordre $[3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$, avec une probabilité $C(8+8-4, 8)/8^8 = 12/(8! \cdot 8^8) = 2,95 \times 10^{-5}$.

C'est assez proche du $1/8!$ attendu, égal à $2,48 \times 10^{-5}$. L'écart entre la probabilité d'obtenir $[3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$ que donnerait un mélange idéal ($1/8!$) et celle que donne le 2-mélange américain effectué trois fois est de $0,47 \times 10^{-5}$. Bien sûr, une série de mélanges américains ne sera satisfaisante que si l'écart entre le $1/n!$ attendu et la probabilité d'avoir l'ordre Q est petit en moyenne quand Q varie, ou mieux, si on obtient une somme assez petite quand on additionne tous les écarts pour les $n!$ ordres possibles.

Cette somme mesure si un mélange américain appliqué k fois est acceptable. Pour que le maximum possible de cette distance soit 1 (ce qui est un repère commode), on calcule la distance d'un mélange américain au cas idéal (où tous les ordres sont équiprobables) en calculant la demi-somme de tous les écarts possibles. Le tableau de résultats ci-dessous, calculé par D. Bayer et P. Diaconis, indique, pour un paquet de n cartes et pour une opération de mélange américain réalisée k fois, la distance obtenue avec le mélange idéal : quand la distance est proche de 1, le mélange est mauvais ; plus la distance est petite, meilleur il est.

Lorsque la distance est inférieure à $1/10$, le mélange est jugé convenable : en moyenne,

$\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	1,000	1,000	0,999	0,775	0,437	0,231	0,114	0,056	0,028	0,014
32	1,000	1,000	1,000	1,929	0,597	0,322	0,164	0,084	0,042	0,021
52	1,000	1,000	1,000	1,000	0,924	0,614	0,334	0,167	0,085	0,043
78	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,893	0,571	0,307	0,153	0,078
104	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,988	0,772	0,454	0,237	0,119
208	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,914	0,603	0,329
312	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,883	0,565

CE TABLEAU INDIQUE, POUR UN PAQUET DE N CARTES et un mélange américain réalisé k fois, la distance séparant le résultat obtenu de celui du mélange idéal, où tous les ordres ont la même probabilité $1/n!$ d'apparaître.