

Si par exemple vous séparez en deux un paquet de huit cartes, cette loi binomiale indique que vous aurez la séparation 4-4 dans 27,4 % des cas, la séparation 3-5 (ou 5-3) dans 21,9 % des cas, la séparation 2-6 (ou 6-2) dans 10,9 % des cas, la séparation 1-7 (ou 7-1) dans 3,1 % des cas, et la séparation 0-8 (ou 8-0) dans 0,4 % des cas. Le dernier cas est un peu étrange, mais l'exclure ne changerait pas grand-chose.

Pour l'insertion des deux paquets obtenus l'un dans l'autre, le modèle de Gilbert et Shannon est, à nouveau, aussi simple et naturel que possible : lorsqu'on intercale un paquet A de p cartes dans un paquet B de p' cartes, la probabilité pour que la première carte du nouveau paquet soit la carte au-dessus de A est $p/(p+p')$, et elle est de $p'/(p+p')$ que ce soit la carte au-dessus de B. La même idée est reprise quand une ou plusieurs cartes sont déjà déterminées en tête du nouveau paquet, et qu'il reste à insérer deux paquets devenus plus petits.

Des expériences réalisées par P. Diaconis en 1988 ont confirmé que le modèle de Gilbert et Shannon est satisfaisant et constitue donc une bonne modélisation mathématique, un peu idéalisée mais pas trop, de ce qu'on fait quand on effectue le mélange américain. Restait à exploiter ce modèle pour évaluer le nombre de mélanges nécessaires à une mise en désordre convenable du jeu de cartes.

La solution a été publiée en 1992 par Dave Bayer et P. Diaconis (toujours lui !). Elle se fonde sur une élégante idée mathématique. D'abord, on considère une généralisation du mélange américain et de son modèle théorique : au lieu de séparer le paquet initial en deux, on le sépare en a sous-paquets qui sont ensuite insérés simultanément les uns dans les autres. Plus précisément, le nouveau paquet est constitué en prenant les cartes une à une avec des probabilités proportionnelles aux nombres de cartes de chaque paquet. Le modèle mathématique de cette généralisation reprend les mêmes idées que pour le mélange américain avec une séparation en deux. Un tel mélange, qui demanderait en pratique de disposer de a mains, se dénomme a -mélange américain.

Ensuite, et c'est la clef de tout, les chercheurs ont montré qu'effectuer un a -mélange américain suivi d'un b -mélange américain équivaut à réaliser un ab -mélange américain. Ce beau résultat permet d'affirmer que réaliser k fois un mélange américain habituel (c'est-à-dire un 2-mélange américain) revient à effectuer un 2^k -mélange américain. Grâce à cette vision simplifiée de ce qu'est l'opération de mélange américain répétée k fois, il devient possible de connaître la probabilité exacte que k mélanges américains consécutifs produisent un ordre donné, ce qui permet alors de savoir si l'on s'est assez approché du mélange idéal, où chaque ordre possible a une probabilité $1/n$!.

Une formule inattendue

La formule mesurant la qualité du mélange obtenu après un a -mélange américain est remarquable et il est même étonnant qu'une formule aussi simple existe pour décrire l'effet d'une manipulation plutôt compliquée. Voici le résultat et la formule :

La probabilité d'obtenir l'ordre Q , par exemple $Q = [3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$, après un a -mélange américain d'un paquet de n cartes est : $C(a+n - sm(Q), n) / a^n$.

Dans cette formule, C désigne comme précédemment les coefficients du binôme de Newton et $sm(Q)$ est le nombre de suites montantes dans la décomposition de Q en suites montantes. Pour notre exemple, $sm(Q)$ vaut 4, car $[3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$ se décompose en quatre suites montantes : $[3, 8]$, $[5]$, $[2, 4, 6, 7]$, $[1]$.

Voyons une application de la belle formule de Bayer et Diaconis. Partant d'un paquet classé $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ et opérant un 2-mélange américain trois fois de suite, ce qui équivaut à un 8-mélange américain (donc $a=8$), on obtiendra l'ordre $[3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$, avec une probabilité $C(8+8-4, 8)/8^8 = 12!/(8!4!8^8) = 2,95 \times 10^{-5}$.

C'est assez proche du $1/8!$ attendu, égal à $2,48 \times 10^{-5}$. L'écart entre la probabilité d'obtenir $[3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$ que donnerait un mélange idéal ($1/8!$) et celle que donne le 2-mélange américain effectué trois fois est de $0,47 \times 10^{-5}$. Bien sûr, une série de mélanges américains ne sera satisfaisante que si l'écart entre le $1/n!$ attendu et la probabilité d'avoir l'ordre Q est petit en moyenne quand Q varie, ou mieux, si on obtient une somme assez petite quand on additionne tous les écarts pour les $n!$ ordres possibles.

Cette somme mesure si un mélange américain appliqué k fois est acceptable. Pour que le maximum possible de cette distance soit 1 (ce qui est un repère commode), on calcule la distance d'un mélange américain au cas idéal (où tous les ordres sont équiprobables) en calculant la demi-somme de tous les écarts possibles. Le tableau de résultats ci-dessous, calculé par D. Bayer et P. Diaconis, indique, pour un paquet de n cartes et pour une opération de mélange américain réalisée k fois, la distance obtenue avec le mélange idéal : quand la distance est proche de 1, le mélange est mauvais ; plus la distance est petite, meilleur il est.

Lorsque la distance est inférieure à $1/10$, le mélange est jugé convenable : en moyenne,

$\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	1,000	1,000	0,999	0,775	0,437	0,231	0,114	0,056	0,028	0,014
32	1,000	1,000	1,000	1,929	0,597	0,322	0,164	0,084	0,042	0,021
52	1,000	1,000	1,000	1,000	0,924	0,614	0,334	0,167	0,085	0,043
78	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,893	0,571	0,307	0,153	0,078
104	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,988	0,772	0,454	0,237	0,119
208	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,914	0,603	0,329
312	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,883	0,565

CE TABLEAU INDIQUE, POUR UN PAQUET DE N CARTES et un mélange américain réalisé k fois, la distance séparant le résultat obtenu de celui du mélange idéal, où tous les ordres ont la même probabilité $1/n!$ d'apparaître.