

Persi Diaconis, magicien et mathématicien

Persi Diaconis mène des travaux de recherche mathématique aussi bien au sujet des mélanges déterministes qu'au sujet des mélanges aléatoires de cartes. Il s'est aussi intéressé à la physique du pile ou face. Ses résultats ont fait progresser considérablement nos connaissances sur les mélanges de cartes.

Son parcours professionnel est assez singulier. Il est né en 1945. À l'âge de 14 ans, il quitte sa famille pour suivre le prestidigitateur canadien Dai Vernon qui le forme et fait de lui un magicien professionnel. Il pratique le métier durant une dizaine d'années sous le nom de Persi Warren. En 1971, comme il se l'était

promis, il reprend ses études... et y réussit assez bien, puisqu'il soutient une thèse à l'Université Harvard en 1974.

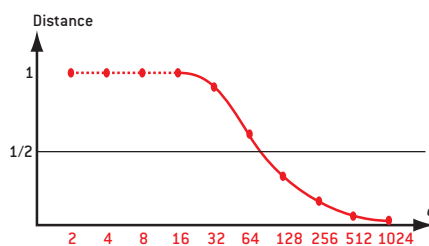


Son ami Martin Gardner expliquait que P. Diaconis jouait au poker pour payer ses études. Il précisait malicieusement que P. Diaconis avait une formidable technique pour le « second deal » et le « bottom deal », qui permettent, quand on distribue les cartes, de donner la deuxième ou la dernière carte du paquet au lieu de la première. P. Diaconis, aujourd'hui professeur de statistiques à l'Université de Stanford, vient de publier avec Ron Graham un livre remarquable sur les idées mathématiques utiles en prestidigitation (*Magical Mathematics: The Mathematical Ideas that Animate Great Magic Tricks*, Princeton University Press, 2011).

la probabilité de chaque ordre possible est à 10 % près celle que donnerait un mélange idéal obtenu après une infinité d'opérations de mélange. Pour un jeu de 52 cartes, on retrouve ce que pensait Borel : sept ou huit mélanges américains sont satisfaisants. La courbe ci-contre indique ce que donne un a -mélange américain pour un jeu de 52 cartes. Les valeurs de a retenues sont les puissances de 2 qui correspondent à un mélange américain usuel effectué une fois, deux fois, trois fois, etc.

La courbe montre clairement un « seuil de bon mélange » : faire le mélange une fois, deux fois, trois fois, quatre fois, cinq fois est insuffisant. À partir de six fois, le mélange devient acceptable, mais ce n'est qu'au-delà de dix fois (pour $a = 2^{10} = 1024$) que l'on sera vraiment proche de 0.

Des études complémentaires menées depuis l'article de 1992 et la prise en considération de calculs fondés sur des distances plus exigeantes indiquent que si sept mélanges américains sont convenables pour 52 cartes, il faut plutôt en faire une douzaine pour se prémunir contre toute triche ou toute mauvaise surprise. Signalons que la magnifique formule donnée plus haut ne rend pas les calculs faciles pour



LA DISTANCE entre le résultat d'un a -mélange américain et celui d'un mélange idéal, pour un jeu de 52 cartes et différentes valeurs de a .

autant : il y a en effet $n!$ ordres possibles pour un paquet de n cartes (pour 52, cela donne $8,1 \times 10^{67}$) et il faut donc ruser pour calculer la demi-somme de tous les écarts, qui mesure la qualité d'un mélange.

L'industrie du jeu n'a pas été indifférente à ces résultats. Aujourd'hui, par exemple, certaines machines à battre les cartes sont programmées pour effectuer les sept mélanges américains conseillés. Les compétences de P. Diaconis sont d'ailleurs appréciées par les ingénieurs qui conçoivent des machines à battre les cartes.

Batteuses de cartes sur le banc d'essai

Une entreprise souhaitant commercialiser une telle machine fondée sur un principe différent du mélange américain s'est ainsi adressée à lui pour qu'il prouve que la machine produisait de bons mélanges. La machine répartissait les cartes sur dix étagères internes en plaçant les cartes une à une aléatoirement sur les étagères et en glissant chaque nouvelle carte au hasard sous ou sur le paquet déjà présent. À la fin de cette distribution sur les dix étagères internes, la machine regroupait les dix paquets constitués en utilisant encore un ordre aléatoire pour les empiler. Le hasard utilisé par cette machine pour chacune de ces opérations était un hasard numérique tiré d'un générateur pseudo-aléatoire.

L'étude du dispositif par l'équipe de P. Diaconis fut une déception pour les industriels. En effet, les conclusions mathématiques sont les suivantes. *a)* La phase finale du mélange des dix paquets posés sur les étagères est inutile et la machine est donc inutilement compliquée. *b)* Une seule application du mélange effectué par la machine est insuffisante et rend possible certaines triches. *c)* En opérant deux fois le mélange effectué par la machine, on arrive à un résultat satisfaisant. La conclusion *c)* ne convenait pas aux ingénieurs qui, pour accélérer le rythme des jeux, voulaient mettre au point la première machine capable de faire un bon mélange en une seule fois.

Récemment, quatre nouveaux types de questions ont été envisagés.

(1) Autres mélanges. Toutes sortes de mélanges aléatoires autres que le mélange américain ont été étudiés. On s'est par exemple intéressé au mélange *top-to-random* consistant à répéter l'opération suivante : on prend la carte du dessus du paquet et on la glisse au hasard dans le reste. Pour ce mélange aléatoire, Lerna Pehlivan a montré en 2010 que l'opération devait être répétée environ $4n \log_2(n)$ fois si on voulait atteindre un désordre de niveau convenable.

(2) Cartes répétées. Dans certains jeux, tel le black-jack pratiqué dans les casinos, seule importe la hauteur des cartes, et donc tous les as, ou tous les rois, sont équivalents. Ce qui compte pour un mélange est donc non pas d'obtenir un paquet de n cartes quelconques, mais un paquet de cartes dont les hauteurs sont quelconques. Cela revient à étudier des paquets de cartes avec répétitions (chaque carte étant répétée quatre fois par exemple). Bien sûr, les cartes répétées facilitent les bons mélanges.

Que devient la règle des 7 (ou 12) mélanges américains pour un paquet avec répétitions de 52 cartes ? En 2006, Mark Conger et Divakar Viswanath ont étudié le problème : pour 52 cartes dont seules les hauteurs ont de l'importance, ils concluent qu'en opérant cinq fois le mélange américain, on aura une assurance de bon mélange comparable à celle donnée par sept mélanges dans le cas où hauteurs et couleurs comptent. Pour un niveau d'exigence fort, les 12 mélanges américains nécessaires pour un paquet de 52 cartes quelconques deviennent 9.

(3) Ordre des cartes dans une main. Un autre point longtemps négligé est maintenant assez bien maîtrisé. Quand le jeu est distribué, chaque joueur ramasse ses cartes et, pour la plupart des jeux, l'ordre des cartes d'un joueur n'a pas d'importance. Seul leur ensemble (sans ordre) détermine si la main du joueur est bonne ou mauvaise. D'ailleurs, un joueur est autorisé à reclasser ses cartes dans sa main (sauf pour certains jeux, comme la bataille). Ce qui importe vraiment pour qu'un mélange soit satisfaisant n'est donc pas que le paquet de cartes avant d'être distribué soit dans l'un des $n!$ ordres possibles avec une probabilité équivalente pour chaque ordre, mais qu'une fois les cartes distribuées,

les quatre ensembles de 13 cartes (pour le jeu de bridge) soient comme si, au départ, le paquet était bien mélangé. On peut économiiser deux mélanges américains grâce à cette remarque. Aussi, le nombre nécessaire d'applications du mélange américain pour que le paquet soit dans un état satisfaisant pour des joueurs de bridge est inférieur à 7, pour l'exigence faible, et inférieur à 12 pour l'exigence forte.

(4) Méthode de distribution. Un dernier point est la distribution d'un paquet mélangé. La méthode habituelle consiste à donner les cartes une à une. Cette opération diminue le risque d'une distribution inéquitable et rend la tricherie plus difficile. La distribution qui consisterait à donner les 13 premières cartes au premier joueur, les 13 suivantes au deuxième, etc., serait pourtant aussi bonne si l'on était certain que le jeu est mélangé de manière idéale. Si s est le nombre de cartes distribuées à chaque joueur, Márton Balázs et Dávid Szabó ont démontré récemment qu'utiliser la distribution cyclique (plutôt que la distribution : s cartes au premier joueur, s cartes au deuxième, etc.) équivaut approximativement à effectuer $\log_2(s)$ mélanges américains.

Quatre mélanges américains au bridge

Dans le cas du jeu de bridge, les sept mélanges américains nécessaires à un désordre convenable pour les 52 cartes se réduisent donc à quatre. Deux mélanges sont économiisés du fait de la prise en compte du point (3) (l'ordre des cartes d'une main est sans importance) et un autre au moins du fait du mode de distribution cyclique. Les 12 mélanges nécessaires pour un désordre donnant une assurance parfaite se réduisent de même à 9 ou moins.

Depuis plus d'un siècle que l'on cherche à comprendre comment il faut s'y prendre pour mélanger et distribuer les cartes avant de faire une partie de bridge, de poker ou de belote, on a percé quelques mystères et élaboré de beaux résultats. Mais soyons certains que d'autres pépites sont restées cachées et attendent que l'œil puissant du théoricien les découvre. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

M. Balázs et D. Szabó, *Comparing dealing methods with repeating cards*, 2012 (<http://arxiv.org/pdf/1208.0695.pdf>)

P. Diaconis et al., *Analysis of the casino shelf shuffling machines*, Technical Report n° 2011-08, Department of Statistics, Stanford University, août 2011.

S. Assaf et al., *A rule of thumb for riffle shuffle*, *Ann. Appl. Probab.*, vol. 21(3), pp. 843-875, 2011.

A. Lachal, *Quelques mélanges parfaits de cartes*, *Quadrature*, n° 76, pp. 13-25, 2010.

P. Diaconis et R. Graham, *The solutions to Elmsley's problem*, *Math Horizons*, vol. 14(3), février 2007.

B. Mann, *How many times should you shuffle a deck of cards*, dans *Topics in Contemporary Probability and its Applications* (éd. J. L. Snell), pp. 261-289, CRC Press, 1995.

D. Bayer et P. Diaconis, *Trailing the dovetail shuffle to its lair*, *The Annals of Applied Probability*, vol. 2(2), pp. 294-313, 1992.