

(1) Autres mélanges. Toutes sortes de mélanges aléatoires autres que le mélange américain ont été étudiés. On s'est par exemple intéressé au mélange *top-to-random* consistant à répéter l'opération suivante : on prend la carte du dessus du paquet et on la glisse au hasard dans le reste. Pour ce mélange aléatoire, Lerna Pehlivan a montré en 2010 que l'opération devait être répétée environ $4n \log_2(n)$ fois si on voulait atteindre un désordre de niveau convenable.

(2) Cartes répétées. Dans certains jeux, tel le black-jack pratiqué dans les casinos, seule importe la hauteur des cartes, et donc tous les as, ou tous les rois, sont équivalents. Ce qui compte pour un mélange est donc non pas d'obtenir un paquet de n cartes quelconques, mais un paquet de cartes dont les hauteurs sont quelconques. Cela revient à étudier des paquets de cartes avec répétitions (chaque carte étant répétée quatre fois par exemple). Bien sûr, les cartes répétées facilitent les bons mélanges.

Que devient la règle des 7 (ou 12) mélanges américains pour un paquet avec répétitions de 52 cartes ? En 2006, Mark Conger et Divakar Viswanath ont étudié le problème : pour 52 cartes dont seules les hauteurs ont de l'importance, ils concluent qu'en opérant cinq fois le mélange américain, on aura une assurance de bon mélange comparable à celle donnée par sept mélanges dans le cas où hauteurs et couleurs comptent. Pour un niveau d'exigence fort, les 12 mélanges américains nécessaires pour un paquet de 52 cartes quelconques deviennent 9.

(3) Ordre des cartes dans une main. Un autre point longtemps négligé est maintenant assez bien maîtrisé. Quand le jeu est distribué, chaque joueur ramasse ses cartes et, pour la plupart des jeux, l'ordre des cartes d'un joueur n'a pas d'importance. Seul leur ensemble (sans ordre) détermine si la main du joueur est bonne ou mauvaise. D'ailleurs, un joueur est autorisé à reclasser ses cartes dans sa main (sauf pour certains jeux, comme la bataille). Ce qui importe vraiment pour qu'un mélange soit satisfaisant n'est donc pas que le paquet de cartes avant d'être distribué soit dans l'un des $n!$ ordres possibles avec une probabilité équivalente pour chaque ordre, mais qu'une fois les cartes distribuées,

les quatre ensembles de 13 cartes (pour le jeu de bridge) soient comme si, au départ, le paquet était bien mélangé. On peut économetriser deux mélanges américains grâce à cette remarque. Aussi, le nombre nécessaire d'applications du mélange américain pour que le paquet soit dans un état satisfaisant pour des joueurs de bridge est inférieur à 7, pour l'exigence faible, et inférieur à 12 pour l'exigence forte.

(4) Méthode de distribution. Un dernier point est la distribution d'un paquet mélangé. La méthode habituelle consiste à donner les cartes une à une. Cette opération diminue le risque d'une distribution inéquitable et rend la tricherie plus difficile. La distribution qui consisterait à donner les 13 premières cartes au premier joueur, les 13 suivantes au deuxième, etc., serait pourtant aussi bonne si l'on était certain que le jeu est mélangé de manière idéale. Si s est le nombre de cartes distribuées à chaque joueur, Márton Balázs et Dávid Szabó ont démontré récemment qu'utiliser la distribution cyclique (plutôt que la distribution : s cartes au premier joueur, s cartes au deuxième, etc.) équivaut approximativement à effectuer $\log_2(s)$ mélanges américains.

Quatre mélanges américains au bridge

Dans le cas du jeu de bridge, les sept mélanges américains nécessaires à un désordre convenable pour les 52 cartes se réduisent donc à quatre. Deux mélanges sont économetrisés du fait de la prise en compte du point (3) (l'ordre des cartes d'une main est sans importance) et un autre au moins du fait du mode de distribution cyclique. Les 12 mélanges nécessaires pour un désordre donnant une assurance parfaite se réduisent de même à 9 ou moins.

Depuis plus d'un siècle que l'on cherche à comprendre comment il faut s'y prendre pour mélanger et distribuer les cartes avant de faire une partie de bridge, de poker ou de belote, on a percé quelques mystères et élaboré de beaux résultats. Mais soyons certains que d'autres pépites sont restées cachées et attendent que l'œil puissant du théoricien les découvre. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

M. Balázs et D. Szabó, *Comparing dealing methods with repeating cards*, 2012 (<http://arxiv.org/pdf/1208.0695.pdf>)

P. Diaconis et al., *Analysis of the casino shelf shuffling machines*, Technical Report n° 2011-08, Department of Statistics, Stanford University, août 2011.

S. Assaf et al., *A rule of thumb for riffle shuffle*, *Ann. Appl. Probab.*, vol. 21(3), pp. 843-875, 2011.

A. Lachal, *Quelques mélanges parfaits de cartes*, *Quadrature*, n° 76, pp. 13-25, 2010.

P. Diaconis et R. Graham, *The solutions to Elmsley's problem*, *Math Horizons*, vol. 14(3), février 2007.

B. Mann, *How many times should you shuffle a deck of cards*, dans *Topics in Contemporary Probability and its Applications* (éd. J. L. Snell), pp. 261-289, CRC Press, 1995.

D. Bayer et P. Diaconis, *Trailing the dovetail shuffle to its lair*, *The Annals of Applied Probability*, vol. 2(2), pp. 294-313, 1992.