

(1) Autres mélanges. Toutes sortes de mélanges aléatoires autres que le mélange américain ont été étudiés. On s'est par exemple intéressé au mélange *top-to-random* consistant à répéter l'opération suivante : on prend la carte du dessus du paquet et on la glisse au hasard dans le reste. Pour ce mélange aléatoire, Lerna Pehlivan a montré en 2010 que l'opération devait être répétée environ $4n \log_2(n)$ fois si on voulait atteindre un désordre de niveau convenable.

(2) Cartes répétées. Dans certains jeux, tel le black-jack pratiqué dans les casinos, seule importe la hauteur des cartes, et donc tous les as, ou tous les rois, sont équivalents. Ce qui compte pour un mélange est donc non pas d'obtenir un paquet de n cartes quelconques, mais un paquet de cartes dont les hauteurs sont quelconques. Cela revient à étudier des paquets de cartes avec répétitions (chaque carte étant répétée quatre fois par exemple). Bien sûr, les cartes répétées facilitent les bons mélanges.

Que devient la règle des 7 (ou 12) mélanges américains pour un paquet avec répétitions de 52 cartes ? En 2006, Mark Conger et Divakar Viswanath ont étudié le problème : pour 52 cartes dont seules les hauteurs ont de l'importance, ils concluent qu'en opérant cinq fois le mélange américain, on aura une assurance de bon mélange comparable à celle donnée par sept mélanges dans le cas où hauteurs et couleurs comptent. Pour un niveau d'exigence fort, les 12 mélanges américains nécessaires pour un paquet de 52 cartes quelconques deviennent 9.

(3) Ordre des cartes dans une main. Un autre point longtemps négligé est maintenant assez bien maîtrisé. Quand le jeu est distribué, chaque joueur ramasse ses cartes et, pour la plupart des jeux, l'ordre des cartes d'un joueur n'a pas d'importance. Seul leur ensemble (sans ordre) détermine si la main du joueur est bonne ou mauvaise. D'ailleurs, un joueur est autorisé à reclasser ses cartes dans sa main (sauf pour certains jeux, comme la bataille). Ce qui importe vraiment pour qu'un mélange soit satisfaisant n'est donc pas que le paquet de cartes avant d'être distribué soit dans l'un des $n!$ ordres possibles avec une probabilité équivalente pour chaque ordre, mais qu'une fois les cartes distribuées,

les quatre ensembles de 13 cartes (pour le jeu de bridge) soient comme si, au départ, le paquet était bien mélangé. On peut économetriser deux mélanges américains grâce à cette remarque. Aussi, le nombre nécessaire d'applications du mélange américain pour que le paquet soit dans un état satisfaisant pour des joueurs de bridge est inférieur à 7, pour l'exigence faible, et inférieur à 12 pour l'exigence forte.

(4) Méthode de distribution. Un dernier point est la distribution d'un paquet mélangé. La méthode habituelle consiste à donner les cartes une à une. Cette opération diminue le risque d'une distribution inéquitable et rend la tricherie plus difficile. La distribution qui consisterait à donner les 13 premières cartes au premier joueur, les 13 suivantes au deuxième, etc., serait pourtant aussi bonne si l'on était certain que le jeu est mélangé de manière idéale. Si s est le nombre de cartes distribuées à chaque joueur, Márton Balázs et Dávid Szabó ont démontré récemment qu'utiliser la distribution cyclique (plutôt que la distribution : s cartes au premier joueur, s cartes au deuxième, etc.) équivaut approximativement à effectuer $\log_2(s)$ mélanges américains.

Quatre mélanges américains au bridge

Dans le cas du jeu de bridge, les sept mélanges américains nécessaires à un désordre convenable pour les 52 cartes se réduisent donc à quatre. Deux mélanges sont économetrisés du fait de la prise en compte du point (3) (l'ordre des cartes d'une main est sans importance) et un autre au moins du fait du mode de distribution cyclique. Les 12 mélanges nécessaires pour un désordre donnant une assurance parfaite se réduisent de même à 9 ou moins.

Depuis plus d'un siècle que l'on cherche à comprendre comment il faut s'y prendre pour mélanger et distribuer les cartes avant de faire une partie de bridge, de poker ou de belote, on a percé quelques mystères et élaboré de beaux résultats. Mais soyons certains que d'autres pépites sont restées cachées et attendent que l'œil puissant du théoricien les découvre. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

M. Balázs et D. Szabó, *Comparing dealing methods with repeating cards*, 2012 (<http://arxiv.org/pdf/1208.0695.pdf>)

P. Diaconis et al., *Analysis of the casino shelf shuffling machines*, Technical Report n° 2011-08, Department of Statistics, Stanford University, août 2011.

S. Assaf et al., *A rule of thumb for riffle shuffle*, *Ann. Appl. Probab.*, vol. 21(3), pp. 843-875, 2011.

A. Lachal, *Quelques mélanges parfaits de cartes*, *Quadrature*, n° 76, pp. 13-25, 2010.

P. Diaconis et R. Graham, *The solutions to Elmsley's problem*, *Math Horizons*, vol. 14(3), février 2007.

B. Mann, *How many times should you shuffle a deck of cards*, dans *Topics in Contemporary Probability and its Applications* (éd. J. L. Snell), pp. 261-289, CRC Press, 1995.

D. Bayer et P. Diaconis, *Trailing the dovetail shuffle to its lair*, *The Annals of Applied Probability*, vol. 2(2), pp. 294-313, 1992.

ART & SCIENCE

La pomme d'Adam est un citron

Dans un retable flamand du XV^e siècle, les frères van Eyck ont peint une Ève tenant dans sa main un fruit. Une pomme ? Non, une variété de citron nommée... pomme d'Adam.

Loïc MANGIN

Au début du XV^e siècle, Joost Vijdt, notable de la ville de Gand, aujourd'hui en Belgique, commande un retable à Hubert van Eyck (1366-1426) destiné à orner une chapelle privée de l'église Saint-Jean. Le peintre n'aura pas le temps d'achever l'œuvre et sera remplacé après sa mort par son frère Jan van Eyck (1390-1441). Aujourd'hui, certains des 24 panneaux du retable sont en cours de restauration, mais on peut en admirer la plupart dans la chapelle principale de l'édifice religieux, devenu la cathédrale Saint-Bavon en 1559. Précisons qu'un des panneaux, celui dit des *Juges intègres*, n'est qu'une copie, l'original ayant été volé en 1934.

Selon que le polyptique est ouvert ou fermé, on y voit Jésus-Christ, Marie, saint Jean-Baptiste, des anges, l'Annonciation, les portraits des commanditaires (le couple Vijdt), ainsi que l'Adoration de l'agneau de Dieu qui donne son nom à l'ensemble. On distingue aussi sur les panneaux extérieurs Adam et Ève. Beatrix Mecsi, historienne de l'art à l'Université Loránd Eötvös, de Budapest, en Hongrie, et Dirk Huylebrouck, mathématicien au LUCA (Université de Louvain), à Bruxelles, en Belgique, se sont intéressés à cette dernière et plus particulièrement au fruit qu'elle tient dans la main (voir la figure page ci-contre). Quel est-il ?

Écartons d'emblée l'idée d'un fruit... de l'imagination, les frères van Eyck étant réputés pour leur sens du détail et le réalisme poussé de leurs œuvres. La première idée quant au fruit que tient Ève serait une

pomme, l'imaginaire collectif associant souvent les deux. Cependant, la Bible ne parlerait que d'un fruit, et non d'une pomme. Le choix est donc laissé à l'appréciation des artistes. De fait, Lucas Cranach a bien représenté une pomme dans *Adam et Ève dans le jardin d'Éden*. En revanche, dans les fresques de la chapelle Sixtine, Michel-Ange a préféré une figue, conformément à la tradition juive selon laquelle les feuilles de figuier furent les premiers vêtements d'Adam et Ève, une fois le fruit défendu consommé. D'autres encore ont choisi un citron, une grappe de raisin, une cerise, une olive... La grenade a aussi eu ses partisans au prétexte que ce fruit est mentionné dans le livre de l'Exode et dans le Coran. Pourtant, la grenade pousse sur un arbuste, non sur un arbre.

Quoi qu'il en soit, à la Renaissance, le pommier s'est imposé dans la tradition occidentale. L'une des raisons serait l'ambiguïté du mot latin *malum* signifiant, d'une part, le pommier et, d'autre part, le mal.

Aucun de ces fruits ne correspond à celui du retable des van Eyck. Peter Schmidt, chanoine à la cathédrale Saint-Bavon, est l'auteur d'un ouvrage sur l'Adoration de l'agneau. Le théologien y analyse l'idée de son collègue Luc Dequeker selon qui Ève porterait un étrog, un cultivar du cédrat utilisé par les juifs lors de la fête de Soukkot. L'agrumes est l'un des quatre constituants, avec une palme de dattier, un rameau de myrte et une branche de saule, du bouquet de quatre espèces confectionné à cette occasion. Or sur un autre panneau,



Dirk Huylebrouck

on reconnaît certaines des quatre espèces dans les mains d'un personnage. Pourtant, la morphologie de l'étranger ne correspond pas à ce qui est peint : ce fruit n'a pas la trace circulaire que l'on distingue sur le tableau. P. Schmidt propose donc que le fruit est une sorte de citron aux formes noueuses, mais sans préciser lequel.

Les fruits du genre *Citrus* étaient exotiques dans les Flandres du début du XV^e siècle, mais Jan van Eyck a beaucoup voyagé en Europe du Sud, et notamment en Espagne. Il a sans doute vu plusieurs de ces fruits dont il a pu rapporter des spécimens. Et il n'a pu qu'être séduit par ceux nommés... « pommes d'Adam », c'est-à-dire ceux de l'espèce *Citrus lumia*, variété *pomum adami*. De fait, ces fruits sont bien dotés d'une trace circulaire semblable à celle du fruit d'Ève ; cette trace évoque une morsure, celle du premier homme. Selon une équipe de généticiens de l'Université de Catane, en Italie, les « pommes d'Adam » seraient parmi les premiers hybrides connus entre un pomelo, un citron et un lime.

Marco Polo aurait vu la pomme d'Adam en Perse et elle aurait été importée au Proche-Orient par les Arabes, puis en Europe par les Croisés, au milieu du XIII^e siècle. Ces fruits existent encore dans certains conservatoires dédiés aux agrumes (page ci-contre, un fruit semblable à celui d'Ève). Le Paradis est perdu, mais le fruit s'est défendu ! ■

D. Huylebrouck et B. Mecs, *Het Fruitmysterie van het Lam Gods*, EOS, Anvers, juin 2011.



akg-images