

LOGIQUE & CALCUL

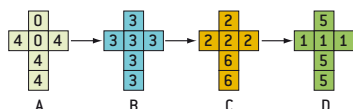
Les dés affreux d'Efron

Les rapports de force entre dés différents sont parfois étranges et trompent fortement l'intuition. Ils peuvent même s'inverser si on lance les dés deux fois au lieu d'une.

Jean-Paul DELAHAYE

Si 1 est meilleur que 2, si 2 est meilleur que 3, ..., et si $N - 1$ est meilleur que N , alors bien sûr 1 est meilleur que N ! Eh bien, pas toujours ! Dans certaines circonstances, il y a non-transitivité : 1 est battu par N .

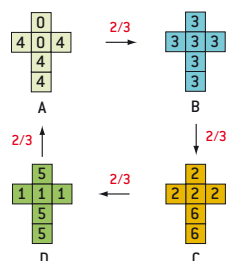
Martin Gardner aimait s'amuser de ce qui trouble l'esprit et choque le bon sens. Il a notamment fait une large publicité aux dés intransitifs d'Efron, dont la descendance remarquable perfectionne et démultiplie le paradoxe initial. En 1970, dans sa rubrique mensuelle de *Scientific American*, Gardner présentait les quatre dés que venait d'inventer Bradley Efron, statisticien à l'Université de Stanford :



Nous les noterons $A = [0, 0, 4, 4, 4, 4]$, $B = [3, 3, 3, 3, 3, 3]$, $C = [2, 2, 2, 2, 6, 6]$, $D = [1, 1, 1, 5, 5, 5]$. Nous supposons que chaque face tombe avec la probabilité $1/6$: les dés ne sont pas truqués. Lorsqu'on jette simultanément le dé A et le dé B et en considérant que le résultat supérieur désigne le gagnant, il y a $36 = 6 \times 6$ cas possibles équiprobables. Douze cas donnent « 0 pour A et 3 pour B », et 24 cas donnent « 4 pour A et 3 pour B ». Le dé A gagne donc 24 fois et le dé B 12 fois. L'avantage est au dé A, qui gagne dans deux tiers des cas.

La comparaison de B et C montre que B gagne aussi contre C dans deux tiers des

cas. De même, C gagne contre D dans deux tiers des cas, et — surprise — D gagne contre A dans deux tiers des cas aussi. Nous parlerons de « chaîne intransitive de longueur 4 » et nous représenterons les résultats ainsi :



C'est étonnant. L'explication de l'apparent paradoxe est simplement que nous avons tort de croire que la relation « Le dé X est plus fort que le dé Y » est transitive. La force d'un dé n'est pas mesurable par un paramètre unique comme la vitesse lors d'une comparaison de coureurs à pied ou de la valeur en euros pour l'évaluation des voitures. La force d'un dé est spécifique de chaque rencontre, elle dépend du contexte créé par les dés opposés.

Le résultat moyen d'un dé, la somme des faces divisée par 6, qui aurait pu être ce paramètre unique mesurant la force d'un dé, ne convient pas. En effet, ces résultats moyens sont : 2,66 pour A ; 3 pour B ; 3,33 pour C ; et 3 pour D. Or le dé A, qui a une moins bonne moyenne que le dé B, le bat dans deux tiers des cas ! De même, B, qui a une moins bonne moyenne que C, est meilleur que lui dans une rencontre à deux

(le signe $>$ signifie ici « gagne contre ») :
 $A >_{2/3} B >_{2/3} C >_{2/3} D >_{2/3} A$
 2,66 3 3,33 3 2,66
 Ni le résultat moyen d'un dé ni aucun paramètre global ne mesurent ici de manière absolue la force d'un dé.

Profiter du paradoxe

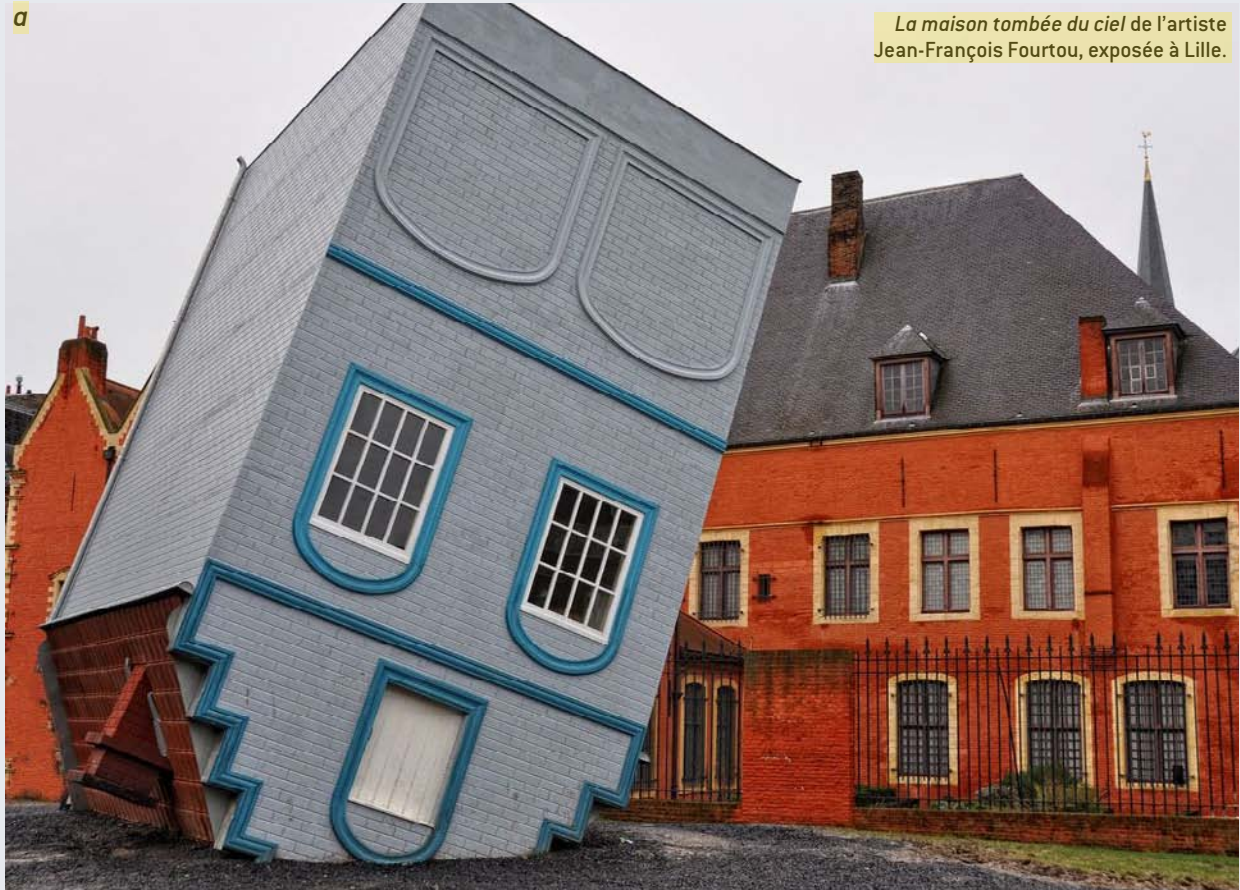
Les dés d'Efron vous serviront peut-être à arrondir vos fins de mois. Proposez le jeu suivant à votre ami qui aime tant parier : « Voici quatre dés A, B, C et D ; nous allons en choisir chacun un ; je te laisse choisir en premier ; ensuite nous lancerons les dés cinq fois de suite simultanément, et celui qui aura gagné le plus souvent recevra 100 euros de l'autre. »

Si votre ami choisit A, vous choisirez D, plus fort que A ; s'il choisit B, vous choisirez A, plus fort que B, etc. La chaîne intransitive vous assure de toujours trouver un dé plus fort que celui de votre victime.

À chaque lancer, vous aurez deux chances sur trois de gagner, ce qui vous fera gagner dans exactement 79,01 % des cas en faisant le bilan des cinq lancers. Si vous trouvez que c'est encore trop risqué, proposez de lancer les dés 25 fois au lieu de 5 fois. Vous gagnerez alors dans 95,84 % des cas. Le calcul se fait, à partir du $2/3$ favorable à votre dé, en additionnant les probabilités de gagner 25 fois sur 25, 24 fois sur 25, 23 fois sur 25, ..., jusqu'à 13 fois sur 25. La loi binomiale indique que dans une telle situa-

Le monde à l'envers de l'intransitivité

a



La maison tombée du ciel de l'artiste Jean-François Fourtou, exposée à Lille.

L'intransitivité vous met la tête à l'envers (a)! En sport, il n'est pas rare que l'équipe A batte l'équipe B, qui bat l'équipe C, qui bat l'équipe A. La propriété de transitivité (si $a > b$ et $b > c$, alors $a > c$) n'est pas satisfaite.

Cela peut résulter d'une méforme de l'équipe A, qui a mal joué le jour où elle a rencontré l'équipe C. Pourtant, il existe en mathématiques plusieurs situations de ce type où aucune méforme ne peut être invoquée pour expliquer l'intransitivité constatée. Bien que tout soit constant d'une partie à la suivante, tout se passe comme au jeu pierre-feuille-ciseaux (b) :

les ciseaux sont plus forts que la feuille (ils la découpent), la feuille bat la pierre (elle l'enveloppe), la pierre gagne contre les ciseaux (elle les fracasse).

teur et trois candidats A, B et C. On trouve que 23 électeurs classent les candidats $A > B > C$, 17 classent $B > C > A$, 2 classent $B > A > C$, 10 classent $C > A > B$ et 8 classent $C > B > A$.

Ainsi, 33 électeurs préfèrent A à B contre 27 pour l'inverse; 42 préfèrent B à C et 18 l'inverse; 35 préfèrent C à A contre 25 pour l'inverse. Les préférences exprimées par les électeurs forment une chaîne intransitive : $A > B > C > A$. Les quatre dés d'Efron $A = [0, 0, 4, 4, 4, 4]$, $B = [3, 3, 3, 3, 3, 3]$, $C = [2, 2, 2, 2, 6, 6]$, $D = [1, 1, 1, 5, 5, 5]$ forment de façon analogue une chaîne intransitive.

D'autres jeux de dés ont été inventés dont les propriétés paradoxales sont encore plus contraires à l'intuition que le paradoxe de Condorcet ou que l'escalier impossible d'Escher (c) qui monte, mais revient pourtant à son point de départ.

b



c



Guy Mouque

Fédération internationale de pierre-feuille-ciseaux

philvaughan.org/bag/sin/