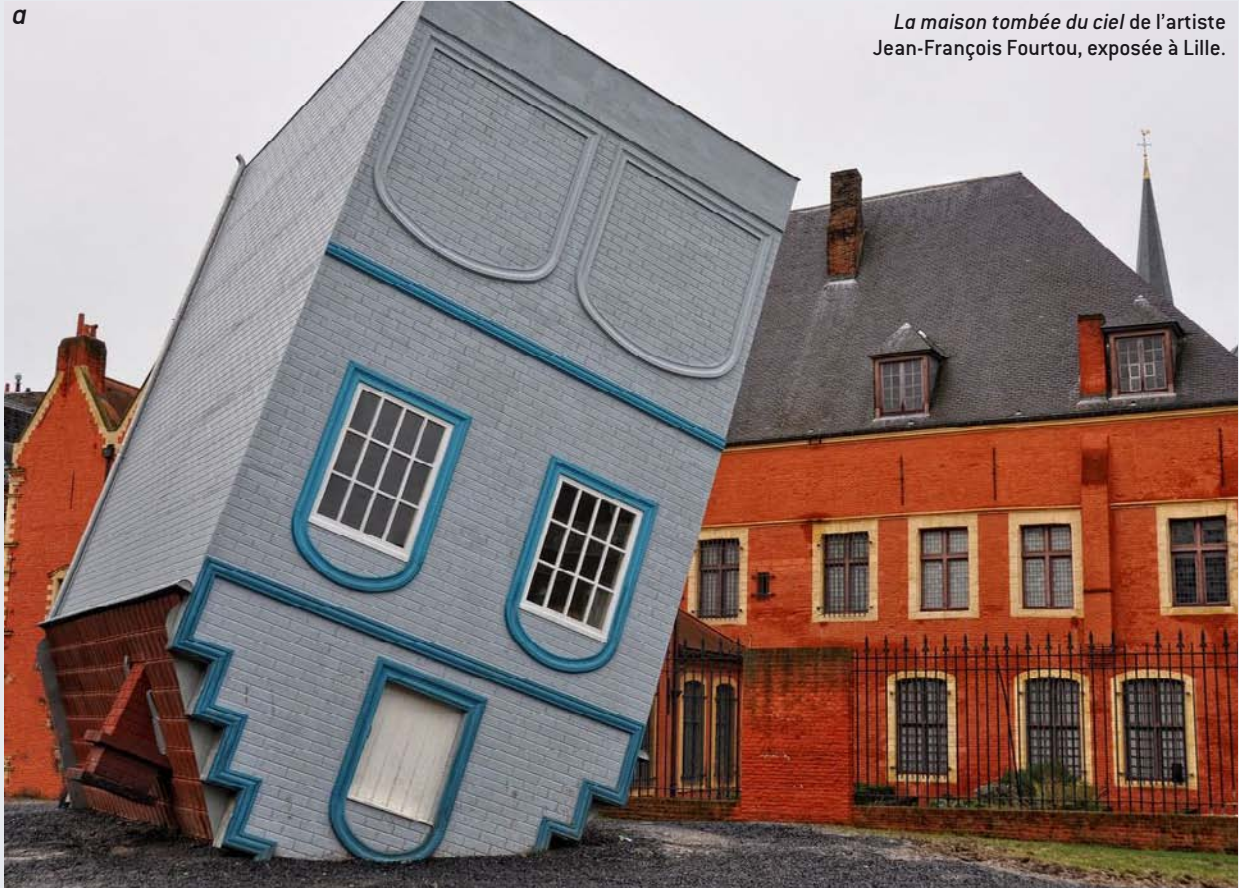


Le monde à l'envers de l'intransitivité

a



La maison tombée du ciel de l'artiste Jean-François Fourtou, exposée à Lille.

Guy Moque

L'intransitivité vous met la tête à l'envers (a)! En sport, il n'est pas rare que l'équipe A batte l'équipe B, qui bat l'équipe C, qui bat l'équipe A. La propriété de transitivité (si $a > b$ et $b > c$, alors $a > c$) n'est pas satisfaite.

Cela peut résulter d'une méforme de l'équipe A, qui a mal joué le jour où elle a rencontré l'équipe C. Pourtant, il existe en mathématiques plusieurs situations de ce type où aucune méforme ne peut être invoquée pour expliquer l'intransitivité constatée. Bien que tout soit constant d'une partie à la suivante, tout se passe comme au jeu pierre-feuille-ciseaux (b) :

les ciseaux sont plus forts que la feuille (ils la découpent), la feuille bat la pierre (elle l'enveloppe), la pierre gagne contre les ciseaux (elle les fracasse).

Le paradoxe de Condorcet est classique. Imaginons la situation où on a 60 élec-

teurs et trois candidats A, B et C. On trouve que 23 électeurs classent les candidats $A > B > C$, 17 classent $B > C > A$, 2 classent $B > A > C$, 10 classent $C > A > B$ et 8 classent $C > B > A$.

Ainsi, 33 électeurs préfèrent A à B contre 27 pour l'inverse; 42 préfèrent B à C et 18 l'inverse; 35 préfèrent C à A contre 25 pour l'inverse. Les préférences exprimées par les électeurs forment une chaîne intransitive : $A > B > C > A$. Les quatre dés d'Efron $A = [0, 0, 4, 4, 4]$, $B = [3, 3, 3, 3, 3]$, $C = [2, 2, 2, 2, 6]$, $D = [1, 1, 1, 5, 5]$ forment de façon analogue une chaîne intransitive.

D'autres jeux de dés ont été inventés dont les propriétés paradoxales sont encore plus contraires à l'intuition que le paradoxe de Condorcet ou que l'escalier impossible d'Escher (c) qui monte, mais revient pourtant à son point de départ.

b



Fédération internationale de pierre-feuille-ciseaux

c



philvaughan.org/bag/sin/

L'inversion miraculeuse

Tim Rowett a proposé un nouveau paradoxe : l'inversion des gagnants. Si l'on considère par exemple les dés $R_1 = [6, 3, 3, 3, 3, 3]$ et $R_2 = [5, 5, 5, 2, 2, 2]$, on a l'in vraisemblable propriété suivante :

En lançant chaque dé une fois, R_1 bat R_2 avec la probabilité $7/12$. Il semble plus fort. Si on lance le dé R_1 deux fois, qu'on fait la somme des résultats et de même avec le dé R_2 , cette fois c'est le

dé R_2 qui gagne, avec une probabilité $765/1296$, soit 0,5903 %. En lançant deux fois un dé gagnant, il devient perdant !

Le paradoxe découvert est en réalité encore plus fort, puisque si l'on considère en plus le dé $R_3 = [1, 4, 4, 4, 4, 4]$, on a alors une chaîne intransitive $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$, qui s'inverse complètement lorsqu'on double les lancers et devient $R_1 < R_2 < R_3 < R_1$.

tion, la probabilité de gagner exactement p fois quand les dés sont lancés n fois est $n! / [(n-p)! p!] (2/3)^p (1/3)^{n-p}$. On en tire les 79,01 % et 95,84 % indiqués.

L'utilisation des dés d'Efron pour gagner de l'argent ne marche que si votre ami n'est pas trop méfiant. Le milliardaire américain Warren Buffet proposa un jour au fondateur de *Microsoft*, Bill Gates, de parier en utilisant les dés d'Efron. Il l'invitait bien sûr à choisir un dé en premier. B. Gates, méfiant, examina les dés et suggéra à W. Buffet de commencer lui-même à prendre un dé. L'histoire ne précise pas le montant de l'enjeu envisagé !

Ce que l'on fait avec quatre dés peut-il être fait avec trois dés ? Peut-on éviter les inélegantes et inquiétantes répétitions de numéros sur les faces ? Se peut-il, ce qui serait plus joli et rassurant pour un parieur, que les trois dés aient la même somme des faces (et donc la même moyenne quand on les lance seuls) ?

Trois dés moins suspects

La réponse est oui. Un exemple de tels triplets intransitifs de dés se trouve dans le livre de Gabor Székely paru en 1986. Ces dés sont : $A' = [5, 7, 8, 9, 10, 18]$, $B' = [2, 3, 4, 15, 16, 17]$, $C' = [1, 6, 11, 12, 13, 14]$. Chaque nombre de 1 à 18 n'est utilisé qu'une seule fois, et tous sont utilisés. Chaque dé totalise 57 points et donne donc en moyenne 9,5.

Les calculs montrent que le dé A' gagne contre B' dans 21 cas sur 36 (soit $7/12$). Il en est de même pour le dé B' contre C' , et pour C' contre A' . Bien que les trois dés soient

différents, il semble régner une symétrie parfaite entre eux : d'une part, chacun, utilisé seul, donne la même moyenne 9,5 ; d'autre part, chacun est gagnant contre un autre avec une probabilité de $7/12$, et perdant contre un autre avec la même probabilité. Les dés forment une chaîne intransitive de longueur 3, comme au jeu pierre-feuille-ciseaux :

$A' >_{7/12} B'$	$B' >_{7/12} C'$	$C' >_{7/12} A'$
9,5	9,5	9,5

Pourtant, et c'est un nouveau paradoxe, si les trois dés sont lancés simultanément, le dé B' se montre nettement meilleur. En effet, il y a 216 résultats équiprobables possibles,

Les huit triplets de dés équivalents

$[5, 7, 8, 9, 10, 18]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[1, 6, 11, 12, 13, 14]_{63}$
$[1, 2, 9, 14, 15, 16]_{81}$	$[3, 4, 5, 10, 17, 18]_{81}$	$[6, 7, 8, 11, 12, 13]_{54}$
$[1, 2, 11, 12, 13, 18]_{81}$	$[3, 4, 5, 14, 15, 16]_{75}$	$[6, 7, 8, 9, 10, 17]_{60}$
$[1, 6, 7, 8, 17, 18]_{81}$	$[2, 9, 10, 11, 12, 13]_{60}$	$[3, 4, 5, 14, 15, 16]_{75}$
$[1, 7, 10, 12, 13, 14]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[5, 6, 8, 9, 11, 18]_{63}$
$[1, 8, 9, 12, 13, 14]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[5, 6, 7, 10, 11, 18]_{63}$
$[1, 8, 10, 11, 13, 14]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[5, 6, 7, 9, 12, 18]_{63}$
$[1, 9, 10, 11, 12, 14]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[5, 6, 7, 8, 13, 18]_{63}$

et leur examen montre que le dé B' l'emporte 90 fois, alors que le dé A' ne gagne que 63 fois, comme le dé C' . L'équivalence des trois dés quand ils jouent seuls ou à deux n'est plus vérifiée quand ils jouent tous ensemble !

Un calcul exhaustif mené en 2010 par Gadin Black pour connaître la liste de tous les triplets de ce type montre qu'il existe huit solutions au problème de trouver trois dés intransitifs ayant les mêmes moyennes individuelles, gagnant avec la même probabilité quand ils gagnent contre un autre et utilisant, à eux trois, une et une seule fois chacun des nombres de 1 à 18. Aucune des solutions ne fait mieux que $7/12$ et aucune

des solutions ne produit un équilibre entre les trois dés quand on les lance tous ensemble. La dissymétrie constatée pour A' , B' et C' est inévitable. Ces huit triplets solutions sont donnés dans l'encadré ci-dessous, avec leurs scores (en indice) quand ils jouent à trois :

Le maximum de gain

Peut-on faire mieux qu'un avantage de $2/3$ quand on prend quatre dés, ou de $7/12$ quand on en prend trois (sans imposer la condition d'utilisation des nombres de 1 à 18) ? Que sait-on de l'avantage maximum possible dans une chaîne intransitive de dés lorsqu'on s'autorise à prendre plus de quatre dés et des dés ayant plus de six faces ?

Assez étrangement, les réponses à ces questions générales avaient été données dans un article de Zalman Usiskin paru en 1964, avant même qu'Efron ne fasse connaître ses dés. L'article se plaçait dans un cadre un peu plus général, mais incluant les jeux de plusieurs dés. Pour trois dés, on ne peut faire mieux que l'inverse du nombre d'or $1/\phi = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,6180...$ Pour quatre dés, le maximum possible (atteint par les dés d'Efron) est $2/3 = 0,6666...$ Pour cinq dés, on ne peut dépasser 0,692, solution de l'équation $b^3 + 3b^2 - 4b + 1 = 0$. Z. Usiskin expliquait comment calculer le résultat pour un nombre de dés supérieur à cinq et il démontrait aussi que lorsque le nombre de dés augmente dans une chaîne

intransitive, l'avantage de chaque dé sur celui qu'il bat peut être amené aussi près qu'on le veut de $3/4$, mais sans jamais l'atteindre.

Un beau résultat, lié encore au nombre d'or, a été démontré en 1994 par Richard Savage à propos des jeux de trois dés intransitifs. R. Savage s'intéresse aux dés à n faces et s'impose (comme pour les dés A' , B' et C') de numéroter les faces avec les entiers allant de 1 à $3n$, chacun utilisé une et une seule fois. R. Savage calcule le minimum M de l'avantage qu'un dé a de gagner sur celui qu'il bat et il cherche à rendre ce minimum le plus grand possible, de sorte que le jeu de trois dés soit le plus favorable possible au parieur