



Les dés admissibles

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	A ₁₁	A ₁₂
A ₁												
A ₂	1/2	1/2	1/2	1/3	2/5	2/3	1/2	3/5	1/2	2/5	3/5	1/2
A ₃	1/2	1/2	1/2	7/17	3/7	10/17	1/2	4/7	1/2	10/23	13/23	1/2
A ₄	1/2	1/2	1/2	9/19	8/17	10/19	1/2	9/17	1/2	10/21	11/21	1/2
A ₅	2/3	10/17	10/19	1/2	4/9	4/7	5/9	12/23	1/2	8/19	1/2	10/21
A ₆	3/5	4/7	9/17	5/9	1/2	12/23	13/24	9/19	1/2	8/17	5/11	11/23
A ₇	1/3	7/17	9/19	3/7	11/23	1/2	4/9	5/9	1/2	1/2	11/19	11/21
A ₈	1/2	1/2	1/2	4/9	11/24	5/9	1/2	13/24	1/2	5/11	6/11	1/2
A ₉	2/5	3/7	8/17	11/23	10/19	4/9	11/24	1/2	1/2	6/11	9/17	12/23
A ₁₀	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
A ₁₁	3/5	13/23	11/21	11/19	9/17	1/2	6/11	5/11	1/2	1/2	3/7	9/19
A ₁₂	2/5	10/23	10/21	1/2	6/11	8/19	5/11	8/17	1/2	4/7	1/2	10/19
A ₁₃	1/2	1/2	1/2	11/21	12/23	10/21	1/2	11/23	1/2	10/19	9/19	1/2

Il n'existe pas de dé équitable à cinq faces, mais en prenant un dé équitable à dix faces (construit par exemple à partir de deux pyramides à base pentagonale collées l'une à l'autre) et en répétant chaque face deux fois, on dispose d'un équivalent physique de dé équitable à cinq faces.

Il existe 12 dés admissibles à cinq faces. Par définition, la somme des faces d'un dé admissible donne

la même somme que le dé standard à cinq faces $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, et chaque face n'utilise que les entiers de 1 à 5. Il existe 32 dés admissibles à six faces, 94 pour sept faces, 289 pour huit faces.

Les 12 dés admissibles à cinq faces, représentés par des étoiles dans le tableau ci-dessus, sont :

$A_1 = [3, 3, 3, 3, 3]$; $A_2 = [4, 3, 3, 3, 2]$; $A_3 = [4, 4, 3, 2, 2]$; $A_4 = [4, 4, 3, 3, 1]$; $A_5 = [4, 4, 4, 2, 1]$; $A_6 = [5, 3, 3, 2, 2]$;

$A_7 = [5, 3, 3, 3, 1]$; $A_8 = [5, 4, 2, 2, 2]$; $A_9 = [5, 4, 3, 2, 1]$; $A_{10} = [5, 4, 4, 1, 1]$; $A_{11} = [5, 5, 2, 2, 1]$; $A_{12} = [5, 5, 3, 1, 1]$.

Le tableau indique, à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , la probabilité que le dé A_i gagne contre le dé A_j . On remarque plusieurs choses intéressantes : a) le dé standard (le dé A_9) fait jeu égal avec tous les autres dés admissibles ; b) chaque dé admissible est battu par un autre ; c) il existe de

nombreuses chaînes intransitives, par exemple $A_1 > A_8 > A_5 > A_1$ ou $A_{10} > A_4 > A_1 > A_8 > A_{10}$.

L'étude générale des familles de dés admissibles à n faces effectuée par Mark Finkelstein et Edward Thorpen 2006 montre que les propriétés (a), (b) et (c) sont générales pour tout $n > 3$, et donc en particulier qu'il existe des chaînes intransitives de dés à n faces pour tout entier n .

Les dés de Sicherman

George Sicherman, un colonel américain, s'est posé l'étrange question : « Est-ce que deux dés différents des dés habituels (dont les faces portent les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6) pourraient, si on les lance ensemble, conduire aux mêmes sommes que les dés usuels et cela avec les mêmes probabilités ? ». Les probabilités que l'on doit ob-

tenir sont 1/36 pour 2, 2/36 pour 3, 3/36 pour 4, 4/36 pour 5, 5/36 pour 6, 6/36 pour 7, 5/36 pour 8, 4/36 pour 9, 3/36 pour 10, 2/36 pour 11 et 1/36 pour 12.

Contre toute attente, G. Sicherman réussit à trouver deux dés qui font l'affaire : [1, 2, 2, 3, 3, 4] et [1, 3, 4, 5, 6, 8]. Le tableau ci-

contre permet de vérifier que les 36 sommes possibles sont exactement les mêmes que celles données par deux dés habituels.

La solution de G. Sicherman est unique pour les dés à six faces, mais des généralisations des dés de Sicherman ont été proposées (voir Duane Broline, « Renumbering of the faces of dice », *Mathematics Magazine*, vol. 52(5), pp. 312-315, 1979).

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	3	4	4	5
2	3	4	5	5	6	7
3	4	5	6	6	7	8
4	5	6	7	7	8	9
5	6	7	8	8	9	10
6	7	8	9	9	10	11
7	8	9	10	10	11	12

qui offre un pari comme celui de W. Buffet et B. Gates. R. Savage démontre qu'à condition de prendre des dés ayant beaucoup de faces, on peut s'approcher autant qu'on le souhaite de la limite $1/\phi$ démontrée indépassable par Z. Usiskin (et cela en respectant la contrainte d'utilisation de chaque entier de 1 à $3n$). La valeur optimale $7/12 = 0,5833$ trouvée pour les dés à six faces peut donc être améliorée et s'approcher de $1/\phi = 0,618033...$ d'autant plus qu'on le veut... si l'on prend des triplets de dés à plus de six faces.

Un autre résultat général mérite d'être mentionné. Mark Finkelstein et Edward Thorp se sont intéressés aux dés qu'ils nomment admissibles. Un dé à n faces est admissible si, sur ses faces, n'apparaissent que des nombres compris entre 1 et n (éventuellement plusieurs fois et pas forcément tous), et si la somme des faces d'un dé est la même que celle du dé standard à n faces marquées de 1, 2, 3, ..., n (dont la somme vaut $n(n+1)/2$). Le beau théorème de M. Finkelstein et E. Thorp affirme que si n est supérieur à 3, alors tout dé admissible à n faces, différent du dé standard à n faces, est battu par un autre dé admissible à n faces ; de plus, le dé standard à n faces fait jeu égal contre tout dé admissible à n faces. Une conséquence de ce théorème est que pour tout $n > 3$, il existe des chaînes intransitives de dés admissibles.

Pour $n = 4$ (dés tétraédriques), en plus du dé standard [1, 2, 3, 4], il n'existe que quatre dés admissibles : $F_1 = [3, 3, 2, 2]$, $F_2 = [4, 2, 2, 2]$, $F_3 = [4, 4, 1, 1]$, $F_4 = [3, 3, 3, 1]$. Les combats entre eux donnent :

$$F_1 >_{6/10} F_2 >_{8/14} F_3 >_{8/14} F_4 >_{6/10} F_1 ;$$

$$F_4 >_{9/16} F_2 >_{8/14} F_3 >_{8/14} F_4 ; F_3 \approx F_1.$$

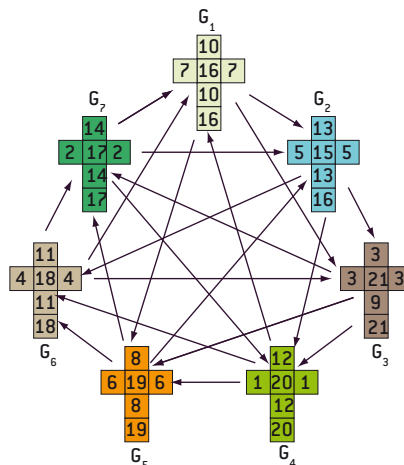
Il n'existe, dans ce cas extrême, que deux chaînes intransitives : l'une, de longueur 4, est composée de F_1, F_2, F_3, F_4 ; l'autre, de longueur 3, est composée de F_2, F_3, F_4 .

On aurait pu penser qu'avec les huit triplets de type A', B', C' ou avec les chaînes intransitives de trois et quatre tétraèdres admissibles, on avait atteint les sommets de la beauté paradoxale. Ce n'est pas le cas, et la série de trois dés $R_1 = [6, 3, 3, 3, 3, 3]$, $R_2 = [5, 5, 5, 2, 2, 2]$, $R_3 = [1, 4, 4, 4, 4, 4]$, inventées en 2002 par Tim Rowett, perfectionne encore le paradoxe. Nous allons voir qu'en plus de composer une chaîne intransitive, elle a une propriété inattendue très intéressante pour faire un pari... même avec B. Gates.

Un pari renversant

Il s'agit bien d'un triplet intransitif : R_1 bat R_2 avec la probabilité $7/12$, R_2 bat R_3 avec la probabilité $7/12$ et R_3 bat R_1 avec la probabilité $25/36$. Rien de bien nouveau jusqu'ici. Pourtant, il se produit quelque chose d'incroyable que je n'ai cru qu'après avoir fait un programme pour le vérifier. Si, au lieu de jeter chaque dé une fois, on choisit de le jeter deux fois et de faire la somme des faces tombées, alors tout s'inverse : R_2 bat R_1 avec la probabilité $765/1296 = 0,5903$; R_3 bat R_2 avec la probabilité $765/1296 = 0,5903$; R_1 bat R_3 avec la probabilité $671/1296 = 0,5177$.

Cette propriété inouïe montre, là encore, que notre intuition en matière de probabilité est illusoire. Elle suggère une nouvelle façon de piéger votre ami le parieur... et cela même s'il est aussi malin que B. Gates et s'il sait que des dés peuvent être intransitifs.



LES SEPT DÉS DU NÉERLANDAIS Oskar van Deventer, un inventeur de jeux. La direction des flèches indique quel est le dé gagnant dans une confrontation entre deux dés. Par exemple, G_1 est gagnant contre G_2 .