

## Les dés de Sicherman

**G**eorge Sicherman, un colonel américain, s'est posé l'étrange question : « Est-ce que deux dés différents des dés habituels (dont les faces portent les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6) pourraient, si on les lance ensemble, conduire aux mêmes sommes que les dés usuels et cela avec les mêmes probabilités ? ». Les probabilités que l'on doit ob-

tenir sont 1/36 pour 2, 2/36 pour 3, 3/36 pour 4, 4/36 pour 5, 5/36 pour 6, 6/36 pour 7, 5/36 pour 8, 4/36 pour 9, 3/36 pour 10, 2/36 pour 11 et 1/36 pour 12.

Contre toute attente, G. Sicherman réussit à trouver deux dés qui font l'affaire : [1, 2, 2, 3, 3, 4] et [1, 3, 4, 5, 6, 8]. Le tableau ci-

contre permet de vérifier que les 36 sommes possibles sont exactement les mêmes que celles données par deux dés habituels.

La solution de G. Sicherman est unique pour les dés à six faces, mais des généralisations des dés de Sicherman ont été proposées (voir Duane Broline, « Renumbering of the faces of dice », *Mathematics Magazine*, vol. 52(5), pp. 312-315, 1979).

| + | ●  | ●● | ●●● | ●●●● | ●●●●● | ●●●●●● |
|---|----|----|-----|------|-------|--------|
| 2 | 3  | 3  | 4   | 4    | 5     |        |
| 4 | 5  | 5  | 6   | 6    | 7     |        |
| 5 | 6  | 6  | 7   | 7    | 8     |        |
| 6 | 7  | 7  | 8   | 8    | 9     |        |
| 7 | 8  | 8  | 9   | 9    | 10    |        |
| 9 | 10 | 10 | 11  | 11   | 12    |        |

qui offre un pari comme celui de W. Buffet et B. Gates. R. Savage démontre qu'à condition de prendre des dés ayant beaucoup de faces, on peut s'approcher autant qu'on le souhaite de la limite  $1/\phi$  démontrée indépassable par Z. Usiskin (et cela en respectant la contrainte d'utilisation de chaque entier de 1 à  $3n$ ). La valeur optimale  $7/12 = 0,5833$  trouvée pour les dés à six faces peut donc être améliorée et s'approcher de  $1/\phi = 0,618033...$  d'aussi près qu'on le veut... si l'on prend des triplets de dés à plus de six faces.

Un autre résultat général mérite d'être mentionné. Mark Finkelstein et Edward Thorp se sont intéressés aux dés qu'ils nomment admissibles. Un dé à  $n$  faces est admissible si, sur ses faces, n'apparaissent que des nombres compris entre 1 et  $n$  (éventuellement plusieurs fois et pas forcément tous), et si la somme des faces d'un dé est la même que celle du dé standard à  $n$  faces marquées de 1, 2, 3, ...,  $n$  (dont la somme vaut  $n(n+1)/2$ ). Le beau théorème de M. Finkelstein et E. Thorp affirme que si  $n$  est supérieur à 3, alors tout dé admissible à  $n$  faces, différent du dé standard à  $n$  faces, est battu par un autre dé admissible à  $n$  faces; de plus, le dé standard à  $n$  faces fait jeu égal contre tout dé admissible à  $n$  faces. Une conséquence de ce théorème est que pour tout  $n > 3$ , il existe des chaînes intransitives de dés admissibles.

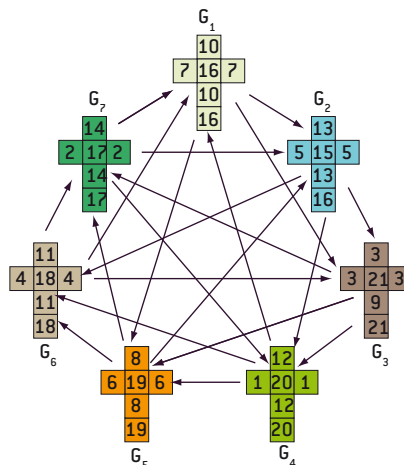
Pour  $n = 4$  (dés tétraédriques), en plus du dé standard [1, 2, 3, 4], il n'existe que quatre dés admissibles:  $F_1 = [3, 3, 2, 2]$ ,  $F_2 = [4, 2, 2, 2]$ ,  $F_3 = [4, 4, 1, 1]$ ,  $F_4 = [3, 3, 3, 1]$ . Les combats entre eux donnent:

$$F_1 >_{6/10} F_2 >_{8/14} F_3 >_{8/14} F_4 >_{6/10} F_1;$$

$$F_4 >_{9/16} F_2 >_{8/14} F_3 >_{8/14} F_4; F_3 \approx F_1.$$

Il n'existe, dans ce cas extrême, que deux chaînes intransitives: l'une, de longueur 4, est composée de  $F_1, F_2, F_3, F_4$ ; l'autre, de longueur 3, est composée de  $F_2, F_3, F_4$ .

On aurait pu penser qu'avec les huit triplets de type A', B', C' ou avec les chaînes intransitives de trois et quatre tétraèdres admissibles, on avait atteint les sommets de la beauté paradoxale. Ce n'est pas le cas, et la série de trois dés  $R_1 = [6, 3, 3, 3, 3]$ ,  $R_2 = [5, 5, 5, 2, 2, 2]$ ,  $R_3 = [1, 4, 4, 4, 4, 4]$ , inventées en 2002 par Tim Rowett, perfectionne encore le paradoxe. Nous allons voir qu'en plus de composer une chaîne intransitive, elle a une propriété inattendue très intéressante pour faire un pari... même avec B. Gates.



**LES SEPT DÉS DU NÉERLANDAIS** Oskar van Deventer, un inventeur de jeux. La direction des flèches indique quel est le dé gagnant dans une confrontation entre deux dés. Par exemple,  $G_1$  est gagnant contre  $G_2$ .

## Un pari renversant

Il s'agit bien d'un triplet intransitif:  $R_1$  bat  $R_2$  avec la probabilité  $7/12$ ,  $R_2$  bat  $R_3$  avec la probabilité  $7/12$  et  $R_3$  bat  $R_1$  avec la probabilité  $25/36$ . Rien de bien nouveau jusqu'ici. Pourtant, il se produit quelque chose d'incroyable que je n'ai cru qu'après avoir fait un programme pour le vérifier. Si, au lieu de jeter chaque dé une fois, on choisit de le jeter deux fois et de faire la somme des faces tombées, alors tout s'inverse:  $R_2$  bat  $R_1$  avec la probabilité  $765/1296 = 0,5903$ ;  $R_3$  bat  $R_2$  avec la probabilité  $765/1296 = 0,5903$ ;  $R_1$  bat  $R_3$  avec la probabilité  $671/1296 = 0,5177$ .

Cette propriété inouïe montre, là encore, que notre intuition en matière de probabilité est illusoire. Elle suggère une nouvelle façon de piéger votre ami le parieur... et cela même s'il est aussi malin que B. Gates et s'il sait que des dés peuvent être intransitifs.

**Vous commencez par lui présenter les dés. Il les examine, repère la chaîne intransitive. Il est alors prêt à parier si vous acceptez de choisir le dé en premier. Vous acceptez de choisir en premier et prenez un dé quelconque (mais de préférence  $R_2$  ou  $R_3$  pour éviter le 0,5177). Il choisit le dé qui bat votre dé dans la chaîne intransitive.**

Vous lui proposez alors de doubler l'enjeu, à la condition de lancer chaque dé deux fois et de comparer les sommes obtenues (cela 25 fois de suite, comme auparavant). Croyant comme tout le monde que lancer deux fois le dé augmente encore son avantage, il acceptera... alors qu'en réalité, l'avantage sera maintenant pour vous et que vous gagnerez le pari (dans précisément 82,10 % des cas). Ahurissant !

Pourquoi y a-t-il l'inversion de la chaîne intransitive ? Pour voir que l'inversion est possible, étudions le cas des deux dés les plus simples :  $R_1 = [6, 3, 3, 3, 3, 3]$  et  $R_3 = [1, 4, 4, 4, 4, 4]$ .

Quand ils sont lancés une seule fois,  $R_3$  bat  $R_1$ , car 4 bat 3 et que cela se produit 25 fois sur les 36 cas possibles. Calculons les sommes possibles de deux faces de  $R_1$  et de deux faces de  $R_3$  :

– Pour  $R_1$  :  $6 + 3 = 9$ , 10 fois ;  $3 + 3 = 6$ , 25 fois ;  $6 + 6 = 12$ , 1 fois.

– Pour  $R_3$  :  $1 + 1 = 2$ , 1 fois ;  $4 + 4 = 8$ , 25 fois ;  $1 + 4 = 5$ , 10 fois.

Il y a 1 296 =  $36 \times 36$  cas possibles quand on lance deux fois  $R_1$  et deux fois  $R_3$ . Le dé  $R_3$  ne gagne que si la somme qu'il obtient est 8. Quand c'est le cas, il ne gagne que si  $R_1$  lancé deux fois fait 6. Le dé  $R_3$  dans la compétition avec double lancer ne gagne donc que  $25 \times 25 = 625$  fois sur les  $36 \times 36 = 1\,296$  cas possibles. C'est moins de la moitié des cas, donc  $R_3$  perd contre  $R_1$  dans une compétition avec des doubles lancers. L'inversion est possible, nous l'avons sous les yeux !

Tentons une explication en quelques mots. Le dé  $R_3$  gagne contre  $R_1$  quand le lancer est simple, mais il gagne en général d'assez peu : 4 contre 3. Cela a pour conséquence que quand on considère les sommes de deux faces de  $R_3$ , celles-ci (2, 8 ou 5) sont assez mauvaises comparées à celles de  $R_1$  (9, 6 ou 12), ce qui le conduit à perdre dans une épreuve constituée de lancers doubles.

Quand on lance chaque dé trois fois au lieu de deux,  $R_2$  bat  $R_1$ ,  $R_3$  bat  $R_2$  et  $R_3$  bat  $R_1$ . Le dé  $R_3$  est donc cette fois dominant, il n'y a plus de chaîne intransitive, celui qui choisit  $R_3$  a toujours l'avantage. C'est étrange, car lorsqu'on fait une compétition directe entre les trois dés (lancer simultanément des trois dés), on obtient 51-90-75 : le dé  $R_2$  est le meilleur !

## Contre deux adversaires

Pour terminer la présentation des descendants superparadoxaux des dés d'Efron, mentionnons les sept dés d'Oskar van Deventer, qui permettent de parier contre deux adversaires à la fois :

$G_1 = [7, 7, 10, 10, 16, 16]$ ,  $G_2 = [5, 5, 13, 13, 15, 15]$ ,  
 $G_3 = [3, 3, 9, 9, 21, 21]$ ,  $G_4 = [1, 1, 12, 12, 20, 20]$ ,  
 $G_5 = [6, 6, 8, 8, 19, 19]$ ,  $G_6 = [4, 4, 11, 11, 18, 18]$   
 et  $G_7 = [2, 2, 14, 14, 17, 17]$ . Le graphe indiquant qui gagne quand deux dés s'opposent est donné page précédente.

Chaque dé a un total des faces de 66, soit 11 points en moyenne. Pour chaque combat, la probabilité de gagner pour le vainqueur est  $20/36 = 5/9$ . En observant le graphe, vous constaterez que pour toute paire de dés choisis parmi les sept, il y a toujours un troisième dé qui les bat tous deux.

Vous pouvez donc proposer le pari suivant à deux de vos amis simultanément. Le premier choisit un dé, le second en choisit un autre. Vous prenez un dé en dernier, qui sera celui qui domine les deux dés choisis par vos amis. Ensuite, vous engagez une partie avec votre premier ami (par exemple en 25 lancers). Le jeu vous est favorable, vous le battez le plus souvent. Sans changer de dé, vous jouez avec votre autre ami (toujours en 25 lancers). À nouveau, les chances seront de votre côté !

Attention toutefois : quand le jeu vous est favorable ou que les chances sont de votre côté, cela ne signifie pas une certitude de victoire à 100 %, mais seulement que vous gagnerez dans plus de la moitié des cas. Ici, le calcul indique qu'avec l'avantage de  $5/9$  et 25 lancers par confrontation, vous gagnerez dans 71 % des cas. Si vous souhaitez gagner plus sûrement, proposez des confrontations en opérant un plus grand nombre de lancers. ■

## L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

## BIBLIOGRAPHIE

J. Grime, **Non-transitive dice**, 2012, sur <http://singinbanana.com/dice/article.htm>

M. Criton, **Les jeux de dés**, *Gazette des Mathématiciens*, vol. 128, pp. 47-61, avril 2011.

M. Finkelstein et E. Thorp, **Nontransitive dice with equal means**, dans *Optimal Play: Mathematical Studies in Games and Gambling*, pp. 293-310, 2006 : <http://www.math.uci.edu/~mfinkels/dice9.pdf>

M. Gardner, **The Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles, Paradoxes, and Problems**, W. W. Norton & Company, pp. 286-311, 2001.

R. Savage, **The paradox of nontransitive dice**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 101(5), pp. 429-436, 1994.

G. Székely, **Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics**, Reidel Publishing Company, 1986.

M. Gardner, **The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference**, *Scientific American*, n° 223, pp. 110-114, décembre 1970.

Z. Usiskin, **Max-min probabilities in the voting paradox**, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, pp. 857-862, 1964.