

Vous commencez par lui présenter les dés. Il les examine, repère la chaîne intransitive. Il est alors prêt à parier si vous acceptez de choisir le dé en premier. Vous acceptez de choisir en premier et prenez un dé quelconque (mais de préférence R_2 ou R_3 pour éviter le 0,5177). Il choisit le dé qui bat votre dé dans la chaîne intransitive.

Vous lui proposez alors de doubler l'enjeu, à la condition de lancer chaque dé deux fois et de comparer les sommes obtenues (cela 25 fois de suite, comme auparavant). Croyant comme tout le monde que lancer deux fois le dé augmente encore son avantage, il acceptera... alors qu'en réalité, l'avantage sera maintenant pour vous et que vous gagnerez le pari (dans précisément 82,10 % des cas). Ahurissant !

Pourquoi y a-t-il l'inversion de la chaîne intransitive ? Pour voir que l'inversion est possible, étudions le cas des deux dés les plus simples : $R_1 = [6, 3, 3, 3, 3, 3]$ et $R_3 = [1, 4, 4, 4, 4, 4]$.

Quand ils sont lancés une seule fois, R_3 bat R_1 , car 4 bat 3 et que cela se produit 25 fois sur les 36 cas possibles. Calculons les sommes possibles de deux faces de R_1 et de deux faces de R_3 :

— Pour R_1 : $6 + 3 = 9$, 10 fois ; $3 + 3 = 6$, 25 fois ; $6 + 6 = 12$, 1 fois.
— Pour R_3 : $1 + 1 = 2$, 1 fois ; $4 + 4 = 8$, 25 fois ; $1 + 4 = 5$, 10 fois.

Il y a $1\,296 = 36 \times 36$ cas possibles quand on lance deux fois R_1 et deux fois R_3 . Le dé R_3 ne gagne que si la somme qu'il obtient est 8. Quand c'est le cas, il ne gagne que si R_1 lancé deux fois fait 6. Le dé R_3 dans la compétition avec double lancer ne gagne donc que $25 \times 25 = 625$ fois sur les $36 \times 36 = 1\,296$ cas possibles. C'est moins de la moitié des cas, donc R_3 perd contre R_1 dans une compétition avec des doubles lancers. L'inversion est possible, nous l'avons sous les yeux !

Tentons une explication en quelques mots. Le dé R_3 gagne contre R_1 quand le lancer est simple, mais il gagne en général d'assez peu : 4 contre 3. Cela a pour conséquence que quand on considère les sommes de deux faces de R_3 , celles-ci (2, 8 ou 5) sont assez mauvaises comparées à celles de R_1 (9, 6 ou 12), ce qui le conduit à perdre dans une épreuve constituée de lancers doubles.

Quand on lance chaque dé trois fois au lieu de deux, R_2 bat R_1 , R_3 bat R_2 et R_3 bat R_1 . Le dé R_3 est donc cette fois dominant, il n'y a plus de chaîne intransitive, celui qui choisit R_3 a toujours l'avantage. C'est étrange, car lorsqu'on fait une compétition directe entre les trois dés (lancer simultanément des trois dés), on obtient 51-90-75 : le dé R_2 est le meilleur !

Contre deux adversaires

Pour terminer la présentation des descendants superparadoxaux des dés d'Efron, mentionnons les sept dés d'Oskar van Deventer, qui permettent de parier contre deux adversaires à la fois :

$G_1 = [7, 7, 10, 10, 16, 16]$, $G_2 = [5, 5, 13, 13, 15, 15]$,
 $G_3 = [3, 3, 9, 9, 21, 21]$, $G_4 = [1, 1, 12, 12, 20, 20]$,
 $G_5 = [6, 6, 8, 8, 19, 19]$, $G_6 = [4, 4, 11, 11, 18, 18]$
et $G_7 = [2, 2, 14, 14, 17, 17]$. Le graphe indiquant qui gagne quand deux dés s'opposent est donné page précédente.

Chaque dé a un total des faces de 66, soit 11 points en moyenne. Pour chaque combat, la probabilité de gagner pour le vainqueur est $20/36 = 5/9$. En observant le graphe, vous constaterez que pour toute paire de dés choisis parmi les sept, il y a toujours un troisième dé qui les bat tous deux.

Vous pouvez donc proposer le pari suivant à deux de vos amis simultanément. Le premier choisit un dé, le second en choisit un autre. Vous prenez un dé en dernier, qui sera celui qui domine les deux dés choisis par vos amis. Ensuite, vous engagez une partie avec votre premier ami (par exemple en 25 lancers). Le jeu vous est favorable, vous le battez le plus souvent. Sans changer de dé, vous jouez avec votre autre ami (toujours en 25 lancers). À nouveau, les chances seront de votre côté !

Attention toutefois : quand le jeu vous est favorable ou que les chances sont de votre côté, cela ne signifie pas une certitude de victoire à 100 %, mais seulement que vous gagnerez dans plus de la moitié des cas. Ici, le calcul indique qu'avec l'avantage de $5/9$ et 25 lancers par confrontation, vous gagnerez dans 71 % des cas. Si vous souhaitez gagner plus sûrement, proposez des confrontations en opérant un plus grand nombre de lancers. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Grime, **Non-transitive dice**, 2012, sur <http://singingbanana.com/dice/article.htm>

M. Criton, **Les jeux de dés**, *Gazette des Mathématiciens*, vol. 128, pp. 47-61, avril 2011.

M. Finkelstein et E. Thorp, **Nontransitive dice with equal means**, dans *Optimal Play: Mathematical Studies in Games and Gambling*, pp. 293-310, 2006 : <http://www.math.uci.edu/~mfinkels/dice9.pdf>

M. Gardner, **The Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles, Paradoxes, and Problems**, W. W. Norton & Company, pp. 286-311, 2001.

R. Savage, **The paradox of nontransitive dice**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 101(5), pp. 429-436, 1994.

G. Székely, **Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics**, Reidel Publishing Company, 1986.

M. Gardner, **The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference**, *Scientific American*, n° 223, pp. 110-114, décembre 1970.

Z. Usiskin, **Max-min probabilities in the voting paradox**, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, pp. 857-862, 1964.