

l'histoire, Newton soutenait qu'une sphère centrale ne pouvait pas toucher plus de 12 autres sphères identiques, alors que, selon Gregory, il y avait de la place pour une 13^e sphère dans le halo. Ce problème du «nombre de baisers» n'a été résolu qu'en 1953, quand l'Allemand Kurt Schütte et le Néerlandais Bartel van der Waerden ont prouvé que Newton avait raison, mais de justesse : quand on introduit une 13^e sphère dans la grappe, le diamètre global n'augmente que d'environ cinq pour cent (voir la figure 2).

Pourquoi le compactage des sphères suscite-t-il autant d'intérêt ? Kepler tentait d'expliquer les symétries des flocons de neige, et de nombreux travaux ultérieurs sur les empilements de sphères étaient également motivés par des questions sur la structure des solides et des liquides. L'accent mis récemment sur les grappes a pour origine l'étude des colloïdes, poudres et autres systèmes physiques où la cohésion des amas de particules est assurée par des forces de très courte portée.

Pour construire des grappes et compter les contacts, il est commode de travailler avec des sphères de diamètre de 1 (donc de rayon 1/2). Quand deux telles sphères se touchent, la distance

entre leurs centres vaut 1. Les diagrammes accompagnant cet article montrent une tige de longueur 1 reliant les centres des sphères qui se touchent. Certains modèles physiques des grappes (dont les kits *Geomag*) conservent ce squelette de tiges de liaison et omettent complètement les sphères.

Maximiser les contacts

Dans une grappe de n sphères, notons C_n le nombre total de points de contact, et $\max(C_n)$ la valeur maximale de C_n que l'on rencontre parmi toutes les grappes de n sphères. Pour les plus petites valeurs de n , il n'est pas difficile de trouver $\max(C_n)$ (voir la figure 3).

Le cas $n = 1$ est trivial : une sphère isolée ne touche rien, donc $\max(C_1) = 0$. Deux sphères ne peuvent se toucher qu'en un point, d'où $\max(C_2) = 1$. Pour trois sphères, la meilleure solution est de placer les centres des sphères aux sommets d'un triangle équilatéral ; dans cette configuration, il y a trois points de contact, donc $\max(C_3) = 3$. On peut placer une quatrième sphère au sommet du triangle pour créer un tétraèdre régulier à six contacts deux à deux, d'où $\max(C_4) = 6$.

1. CETTE « GRAPPE » DE DIX ORANGES, construite sur le même mode que l'empilement compact de Kepler, contient 22 contacts entre deux oranges. On peut faire mieux : il existe trois grappes de dix sphères identiques présentant 25 contacts.



© Shutterstock/Imageman

Il est également facile de prouver qu'aucune autre configuration de n sphères, pour $n \leq 4$, ne pourrait avoir un C_n supérieur. En effet, dans ces grappes, chaque sphère touche chacune des autres sphères, et donc le nombre de contacts ne pourrait pas être supérieur. Dans la terminologie de la théorie des graphes, une telle grappe est une clique; le nombre de contacts dans une grappe-clique est $n(n-1)/2 = 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$

Mais à partir de $n = 5$, il est impossible de disposer cinq sphères identiques de façon qu'elles se touchent toutes. Si une clique à cinq sphères existait, elle aurait dix points de contact. Mais on ne peut faire mieux que $C_5 = 9$, qui est le nombre de contacts formés quand on attache une cinquième sphère à une face quelconque de la grappe tétraédrique. La structure ainsi obtenue est une dipyramide triangulaire.

Jusqu'ici, pour chaque valeur de n , il y avait une unique grappe qui maximise C_n . De plus, dans chaque cas, la grappe la mieux connectée comportant $n + 1$ sphères peut être obtenue par incrément en collant une nouvelle sphère quelque part à la surface de la grappe réalisant $\max(C_n)$.

Ces propriétés cessent d'être vraies à partir de $n = 6$. Avec six sphères, deux formes de grappes donnent le même nombre maximal de contacts, $C_6 = 12$ (voir la figure 4). L'une est construite par incrément, à partir de la dipyramide triangulaire à cinq sphères. Mais l'autre, l'octaèdre, ne peut pas être créée en collant simplement une sphère à la surface d'une grappe optimale plus petite.

Au-delà de $n = 6$, trouver toutes les grappes ayant le maximum de contacts devient plus difficile. Pour $n = 7$, l'approche incrémentale consistant à rajouter une sphère à la surface d'une grappe de $n = 6$ donne quatre solutions à 15 points de contact ($C_7 = 15$). Trois de ces grappes sont constituées de quatre tétraèdres collés face contre face de diverses façons (voir la figure 5).

En passant un peu de temps avec les *Geomag* ou un autre jeu de modèles tridimensionnels, on a de bonnes chances de trouver ces quatre configurations. Mais comment savoir s'il n'y a pas d'autres grappes de sept sphères à 15 contacts ? Et comment prouver que l'on ne peut avoir 16 contacts, voire plus ?

Il s'avère que 15 est effectivement le nombre maximal de contacts pour sept sphères, mais il y a aussi une cinquième grappe qui le réalise; il s'agit d'une dipyramide pentagonale (voir la figure 5e). Dotée

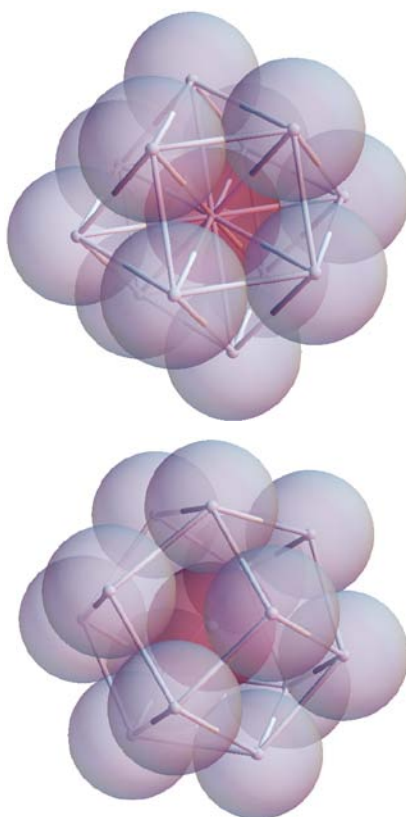
L'AUTEUR



Brian HAYES collabore à la revue *American Scientist* où il tient depuis 1993 la chronique

Computing Science. Son blog (<http://bit-player.org/>) est également consacré à des questions mathématiques.

Article publié avec l'aimable autorisation de *American Scientist*.



2. LE PROBLÈME DU NOMBRE DE BAISERS consiste à se demander combien de sphères peuvent toucher une sphère centrale de même taille. Il n'a reçu une réponse que dans les années 1950. En haut, 12 sphères sont en contact avec la sphère centrale rouge, dans une configuration dérivée du réseau hexagonal compact de Johannes Kepler. Lorsqu'on ajoute une 13^e sphère (en bas), tout le halo de sphères perd contact avec la sphère centrale, bien que le diamètre de la grappe n'augmente que d'environ cinq pour cent. Dans ces diagrammes, si deux sphères se touchent, leurs centres sont reliés par un bâtonnet.

d'une symétrie d'ordre cinq, cette structure n'a aucun motif en commun avec l'une quelconque des grappes plus petites. La nouveauté de cet objet soulève une fois de plus la question : comment être sûr qu'il n'existe pas d'autres configurations à découvrir ?

Pour répondre à ces questions, un programme fructueux a été lancé il y a cinq ans par Natalie Arkus, alors doctorante à l'Université Harvard. Dans une série d'articles écrits avec ses collègues Michael Brenner et Vinodhan Manoharan, elle a énuméré toutes les configurations réalisant $\max(C_n)$ pour $n = 7, 8, 9, 10$. Les résultats ont ensuite été étendus à $n = 11$ par Robert Hoy, Jared Harwayne-Gidansky et Corey O'Hern, de l'Université Yale. Tous les résultats que je décris ici sont issus des travaux de ces deux groupes.

Force de courte portée

Une façon de résoudre les problèmes d'empilements compacts de sphères est de considérer ces dernières comme des particules en interaction *via* une certaine force. Par analyse mathématique ou par des simulations numériques, on peut alors essayer de trouver une configuration géométrique qui minimise l'énergie potentielle du système. En général, la force s'exerçant entre deux particules est une fonction régulière de la distance qui les sépare. Quand les deux particules sont très éloignées, la force est négligeable ; à plus courte portée, la force devient fortement attractive ; à des distances encore plus courtes, une répulsion dite « de cœur dur » empêche les sphères de s'interpénétrer. À l'équilibre, les particules soumises à une force de ce type se disposent avec une séparation petite, mais non nulle.

Le problème du dénombrement des contacts peut être traduit en termes de forces et d'énergie, mais de façon assez particulière. Tout d'abord, la force n'est ici pas une fonction régulière de la distance. Tant que les sphères ne se touchent pas, aucune force ne s'exerce. Mais si les sphères viennent à se toucher, elles se collent ; brusquement, la force devient attractive. Et toute tentative de les rapprocher davantage se heurte à une résistance infinie.

Dans ce monde des sphères collantes, la portée des forces en jeu est plus que courte : elle est nulle (Martin Gardner avait suggéré un modèle pour de tels systèmes : des balles de ping-pong recouvertes de mastic).