

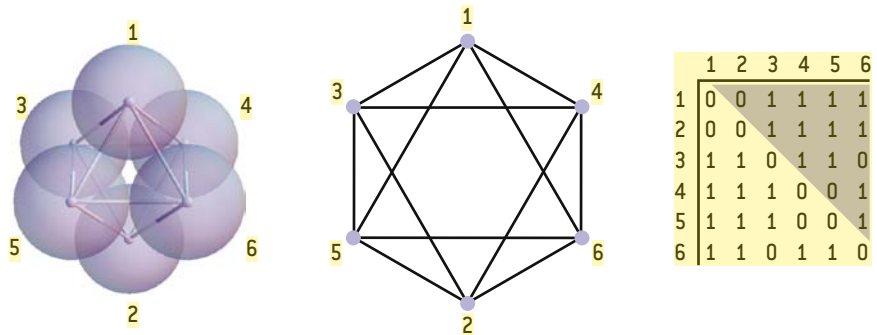
$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = 1$, ce qui signifie que la distance entre les centres des sphères i et j est égale à 1. Pour obtenir les coordonnées de toutes les sphères, ce système d'équations doit être résolu. Pour ce faire, N. Arkus a d'abord essayé une technique nommée base de Gröbner, qui s'est imposée ces dernières années comme un outil puissant de la géométrie algébrique. La méthode offre un moyen systématique de réduire le nombre de variables jusqu'à l'obtention d'une solution. Une implémentation de l'algorithme de base de Gröbner intégré à un système de calcul formel est parvenue à résoudre les équations pour $n = 7$, mais elle s'est révélée trop lente pour $n = 8$.

Des règles géométriques

Une autre approche repose sur des méthodes numériques qui convergent vers une solution par approximations successives. L'exemple le plus connu est la méthode de Newton, qui calcule les racines d'une équation en affinant une estimation initiale. N. Arkus a trouvé que les techniques numériques étaient efficaces, mais elle craignait qu'elles ne garantissent pas de trouver toutes les solutions valables (quand l'algorithme converge, le résultat est une solution correcte, mais une non-convergence ne signifie pas nécessairement qu'il n'existe pas de solution ; cela dépend aussi de l'estimation initiale).

Mettant de côté les méthodes algébriques et numériques, N. Arkus a choisi de se fier au raisonnement géométrique comme guide pour assembler des grappes réalisables et comme moyen d'exclure celles qui sont physiquement impossibles. Une règle de base pour les sphères unité est que si i touche j , alors le centre de j doit se trouver quelque part sur une sphère de rayon 1 centrée sur i . Si k touche à la fois i et j , alors le centre de k doit se trouver quelque part sur l'intersection circulaire de deux sphères voisines. Si l touche à la fois i , j et k , les sites possibles se résument à un ensemble de deux points (voir la figure 7). Avec une poignée de règles générales de ce type, il est toujours possible de déterminer les distances inconnues dans une matrice de distance, à supposer que la matrice d'adjacence décrive une structure réalisable.

On peut appliquer d'autres règles géométriques pour prouver que certaines



6. L'ENSEMBLE DES LIENS DE CONTACT entre sphères peut être résumé par un graphe, où les sommets représentent les sphères et les arêtes les contacts entre deux sphères. La même information est contenue dans la matrice d'adjacence (à droite). Si i et j sont deux sphères quelconques de la grappe, l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice vaut 1 si i touche j , et 0 sinon. Seul le triangle supérieur (en mauve) a besoin d'être spécifié : le triangle inférieur est son image en miroir.

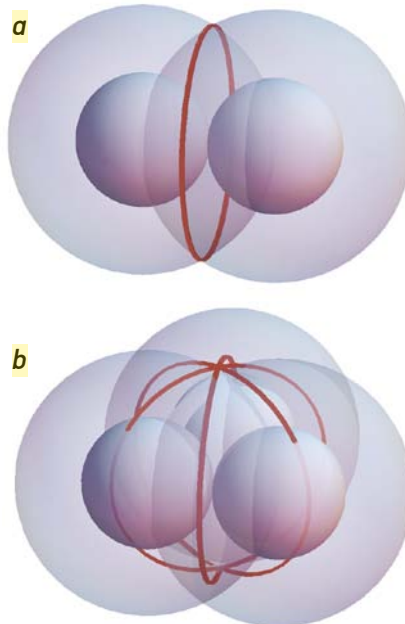
classes de matrices d'adjacence ne peuvent pas donner un empilement de sphères physiquement valide. Par exemple, si les sphères i , j et k se touchent toutes les trois, elles doivent former un triangle équilatéral. Si le motif de 1 dans la matrice d'adjacence indique que plus de deux autres sphères touchent également i , j et k , alors la grappe ne peut pas exister dans un espace tridimensionnel. On peut ainsi éliminer les matrices non physiques sans même explorer la géométrie des grappes.

N. Arkus a également utilisé le kit *Geomag* (voir la figure 5) pour vérifier la faisabilité de certaines configurations. *Geomag* comporte des billes d'acier poli et des tiges aimantées enveloppées d'une gaine de plastique coloré ; toutes les tiges ont la même longueur, et on peut facilement les assembler en un squelette de liens de longueur 1 joignant des centres de sphères. C'est une aide précieuse pour l'intuition géométrique.

N. Arkus et ses collègues ont ainsi déterminé $\max(C_n)$, et identifié toutes les grappes réalisant ces nombres maximaux de contacts, pour tout $n \leq 10$ (voir la figure 10). Ce faisant, ils ont découvert des grappes aux caractéristiques intéressantes.

Pour $n = 8$, le nombre maximal de contacts s'élève à 18, et il existe 13 façons différentes d'obtenir cette limite. Toutes ces grappes, sauf une, peuvent être obtenues par incrément en ajoutant une nouvelle sphère à la surface d'une des grappes de $n = 7$.

Les grappes de neuf sphères ($n = 9$) ont jusqu'à 21 contacts ; pour ce maximum, il en existe 52 variétés. Dans cette foule d'empilements, une structure se singularise, avec une propriété jusqu'ici inédite, la flexibilité : elle peut être tordue autour d'un axe sans casser de liens entre sphères. Cette capacité



7. SI DEUX SPHÈRES sont en contact [a], une troisième sphère ne peut les toucher toutes deux que si son centre se trouve quelque part sur le cercle (en rouge) tracé par l'intersection des deux sphères de rayon double. De la même façon, avec trois sphères toutes en contact mutuel [b], les positions disponibles pour ajouter une quatrième sphère se réduisent à deux points, aux intersections de trois cercles de rayon double.