

LOGIQUE & CALCUL

Qu'est-ce qu'un objet complexe ?

La profondeur logique de Bennett, notion proposée il y a 35 ans, nous rapproche d'une compréhension scientifique de l'idée de complexité.

Jean-Paul DELAHAYE

Les différentes étapes de l'évolution de l'Univers décrites par la cosmologie semblent montrer qu'il se « complexifie ». De même, les écosystèmes terrestres comportent des éléments de plus en plus nombreux et variés interagissant de façon toujours plus subtile et délicate. À une échelle de temps plus réduite, on évoque la « complexification » des sociétés humaines, des échanges sociaux et commerciaux, des objets technologiques et des théories scientifiques. Mais qu'est-ce qui augmente quand on parle de complexité croissante ? Peut-on mesurer cette « complexité » ?

Nombre d'idées ont été proposées pour définir et évaluer la complexité des objets, des processus et des interactions. L'une des propositions, la profondeur logique de Charles Bennett, retient l'attention générale. Grâce à des résultats accumulés depuis son introduction en 1977, elle constitue la piste la plus sérieuse pour une définition scientifique robuste de complexité structurelle ou de richesse en organisation. La mise au point d'outils qui, dans certains cas, la mesurent, permet d'envisager des applications.

Sans surprise, la théorie du calcul est au cœur de la définition proposée par Ch. Bennett, physicien américain connu pour ses recherches en mécanique quantique et en thermodynamique. Qu'un physicien ait recouru à la théorie du calcul suggère que la formulation de Ch. Bennett, qui s'appuie sur

la notion de programme, s'impose et n'est pas juste une façon pour les informaticiens de se hausser du col !

Selon la vision de Ch. Bennett, la complexité structurelle d'un objet (qu'il dénomme profondeur logique) est la longueur du calcul, mesurée en cycles de machine ou plus généralement en ressources de calcul (temps, mémoire ou parallélisme), nécessaire pour qu'un programme court en produise une description explicite et détaillée.

Le résultat d'un programme court, mais d'un long calcul

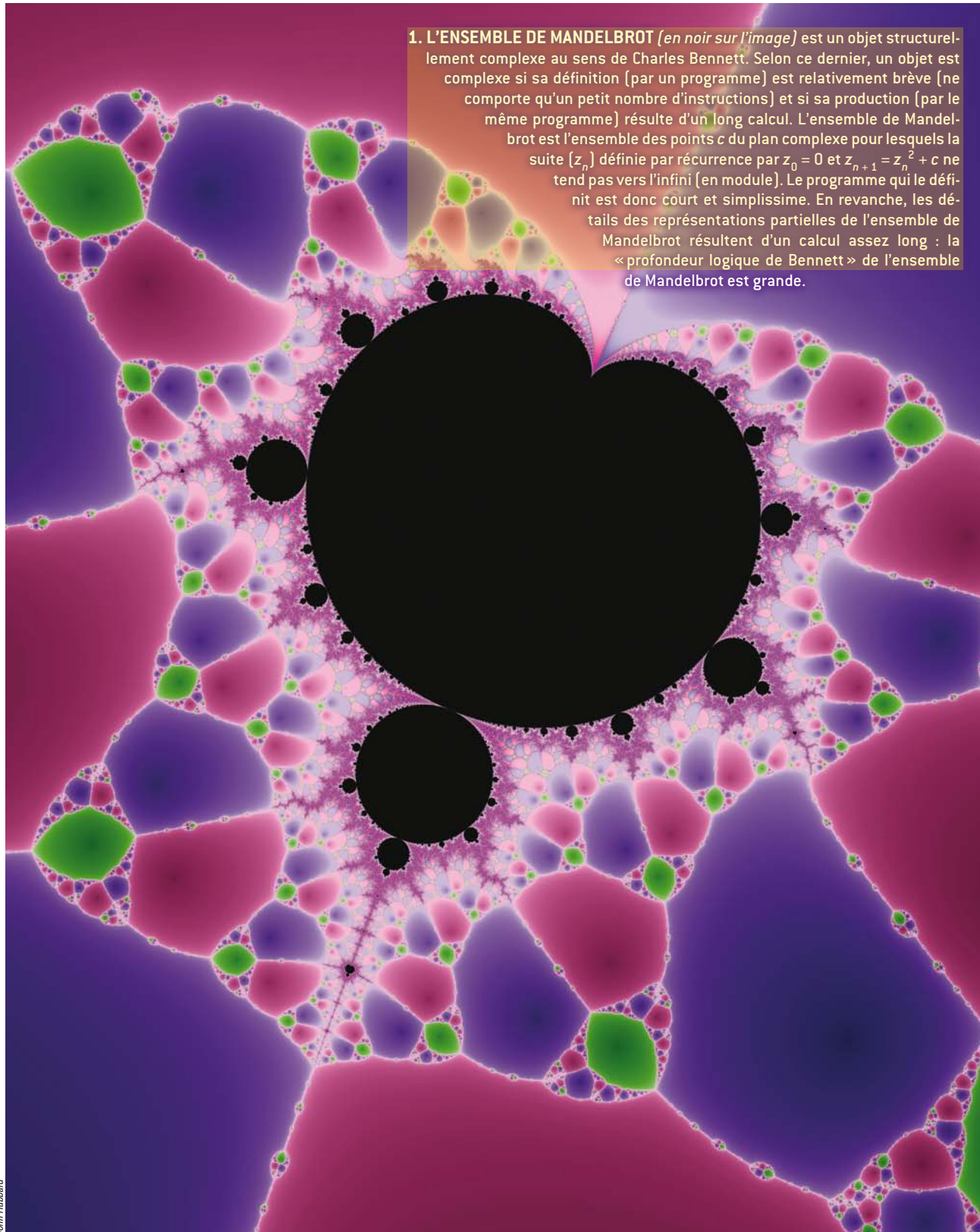
Quand la description complète d'un objet est produite rapidement par un programme court (comportant peu d'instructions), les objets ne sont pas complexes. C'est le cas par exemple pour un bloc de cristal, où le même motif élémentaire – la maille – se répète dans toutes les directions. C'est aussi le cas d'une suite numérique périodique comme 010101...01 (un million de fois). Ces deux objets ne sont pas complexes. Les objets de structure simple possèdent des programmes minimaux courts et ceux-ci produisent leurs résultats sans mettre en œuvre d'importantes ressources de calcul. De tels objets ont une faible « profondeur logique de Bennett ».

Il existe une seconde catégorie d'objets pauvres en structures. Une suite s'indiquant

le résultat d'un million de tirages à pile ou face est faiblement organisée et n'est donc pas structurellement complexe. Un programme court qui en permet l'écriture sera nécessairement de la forme « imprimer s ». Un tel programme s'exécute lui aussi rapidement, car il ne contient aucune boucle ou partie longue à faire fonctionner. Un objet purement aléatoire aura donc une faible profondeur logique de Bennett.

Pour être authentiquement organisé ou structurellement complexe, un objet doit pouvoir être décrit assez brièvement par un programme, ou quelque chose qui y ressemble, dont le fonctionnement est long. On a des raisons de croire que c'est le cas d'un microprocesseur, d'une ville, d'un mammifère, qui sont parmi les objets les plus structurellement complexes que nous connaissons.

Lorsqu'on attribue une grande complexité structurelle à un objet, c'est qu'on voit ou croit voir en lui les traces d'une longue histoire causale assimilable à un calcul. Cette histoire y a forgé les relations qu'entretiennent ses différentes parties et qui constituent sa complexité d'organisation. Si l'on accepte l'idée qu'il est beaucoup plus probable que l'objet qu'on qualifie de structurellement complexe provienne d'une dynamique longue, mais définissable assez simplement, plutôt que d'un processus bref qui l'aurait engendré par chance, alors l'idée de Ch. Bennett de prendre en compte le temps de calcul des programmes les plus



1. L'ENSEMBLE DE MANDELBROT (*en noir sur l'image*) est un objet structurellement complexe au sens de Charles Bennett. Selon ce dernier, un objet est complexe si sa définition (par un programme) est relativement brève (ne comporte qu'un petit nombre d'instructions) et si sa production (par le même programme) résulte d'un long calcul. L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des points c du plan complexe pour lesquels la suite $\{z_n\}$ définie par récurrence par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ne tend pas vers l'infini (en module). Le programme qui le définit est donc court et simplissime. En revanche, les détails des représentations partielles de l'ensemble de Mandelbrot résultent d'un calcul assez long : la « profondeur logique de Bennett » de l'ensemble de Mandelbrot est grande.