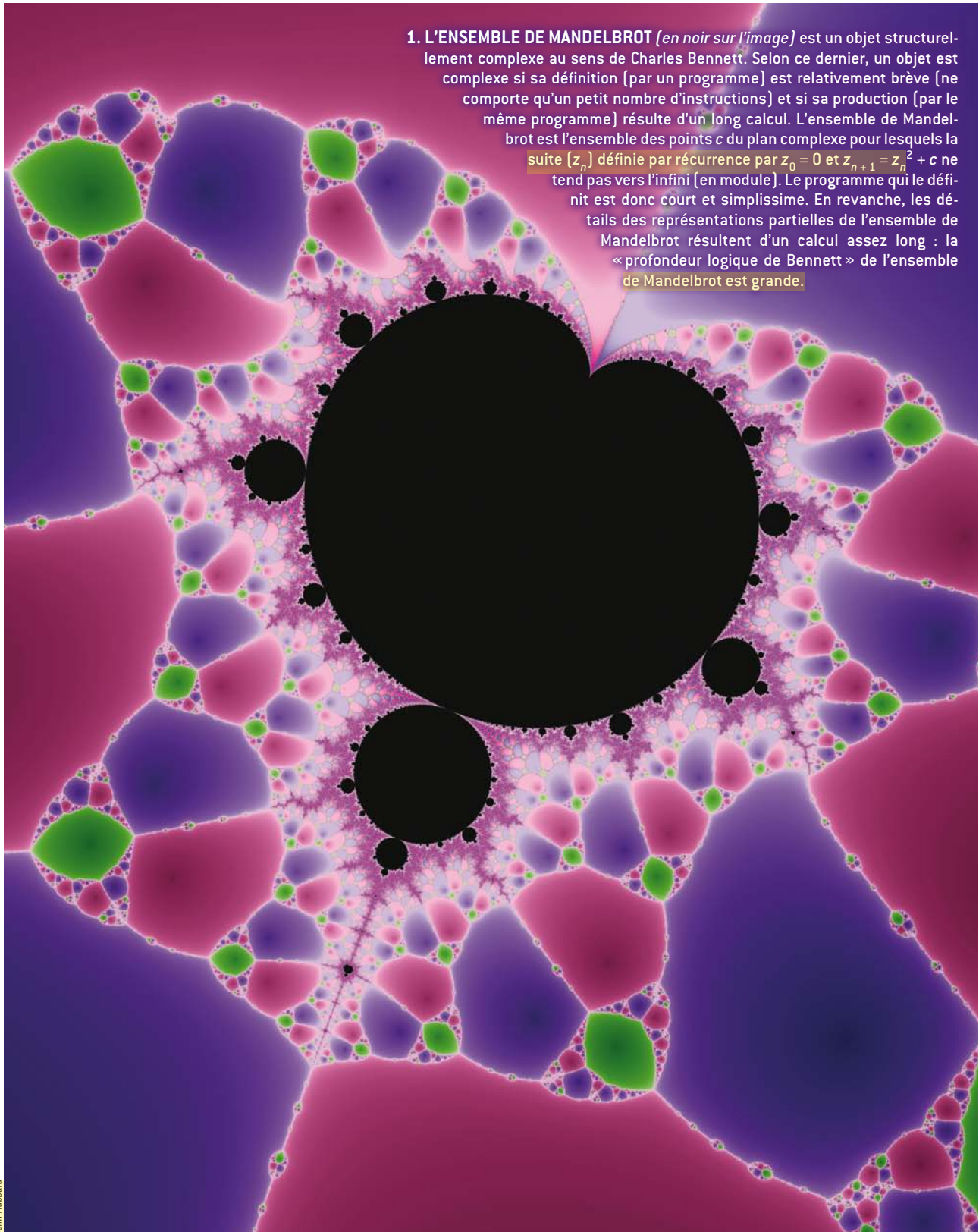


1. L'ENSEMBLE DE MANDELBROT (*en noir sur l'image*) est un objet structurellement complexe au sens de Charles Bennett. Selon ce dernier, un objet est complexe si sa définition (par un programme) est relativement brève (ne comporte qu'un petit nombre d'instructions) et si sa production (par le même programme) résulte d'un long calcul. L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des points c du plan complexe pour lesquels la suite $\{z_n\}$ définie par récurrence par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ne tend pas vers l'infini (en module). Le programme qui le définit est donc court et simplissime. En revanche, les détails des représentations partielles de l'ensemble de Mandelbrot résultent d'un calcul assez long : la « profondeur logique de Bennett » de l'ensemble de Mandelbrot est grande.



John Hubbard

courts qui engendrent l'objet apparaît naturelle et conforme au bon sens.

Avant de préciser comment l'idée de Ch. Bennett se traduit mathématiquement, formulons encore un argument en sa faveur à l'aide d'une expérience de pensée. Imaginez que l'on découvre, écrits sur un tronc d'arbre, un milliard de chiffres binaires consécutifs du nombre π matérialisés par des traits longs (pour les 1) et courts (pour les 0). Que faut-il raisonnablement en penser ?

(a) Que cette suite, qui n'en est qu'une parmi $2^{1000\,000\,000}$ autres de même longueur, se trouve là par hasard, du fait des intempéries ou du travail aveugle de quelques insectes. Ce serait par pure chance que les traits écrivent un milliard de chiffres binaires de π .

(b) Qu'un processus particulier, physique ou impliquant des humains et un ordinateur, a effectué le calcul de ce milliard de chiffres, qui a ensuite été recopié là. Dans ce cas, l'origine des chiffres serait attachée à un programme assez court ou, ce qui revient au même, à quelques lois physiques dont la description serait brève comparée au milliard d'éléments inscrits sur le tronc d'arbre.

Si vous optez pour (a), vous choisissez une conception proche de celle des biologistes d'avant Pasteur, qui défendaient l'idée de la génération spontanée, soutenant par exemple que des rats naissent parfois d'un tas de chiffons humides abandonnés sans qu'aucun rat n'y soit préalablement passé. L'hypothèse (b) correspond à l'idée plus raisonnable, du moins aux yeux de la science moderne, que l'origine des rats dans un tas de chiffons est la même que celle des autres rats : ils sont nés de leurs parents, et sont, comme eux, le produit de l'évolution biologique qui, depuis plus de trois milliards d'années, a élaboré des formes vivantes aux structures de plus en plus riches et délicates. Cette évolution fonctionne selon les lois de la physique et de la chimie, lesquelles font interagir les atomes et molécules, et ces interactions sont assimilables à un calcul.

Pour les rats du tas de chiffons, comme pour le milliard de chiffres de π de notre expérience de pensée, la complexité struc-

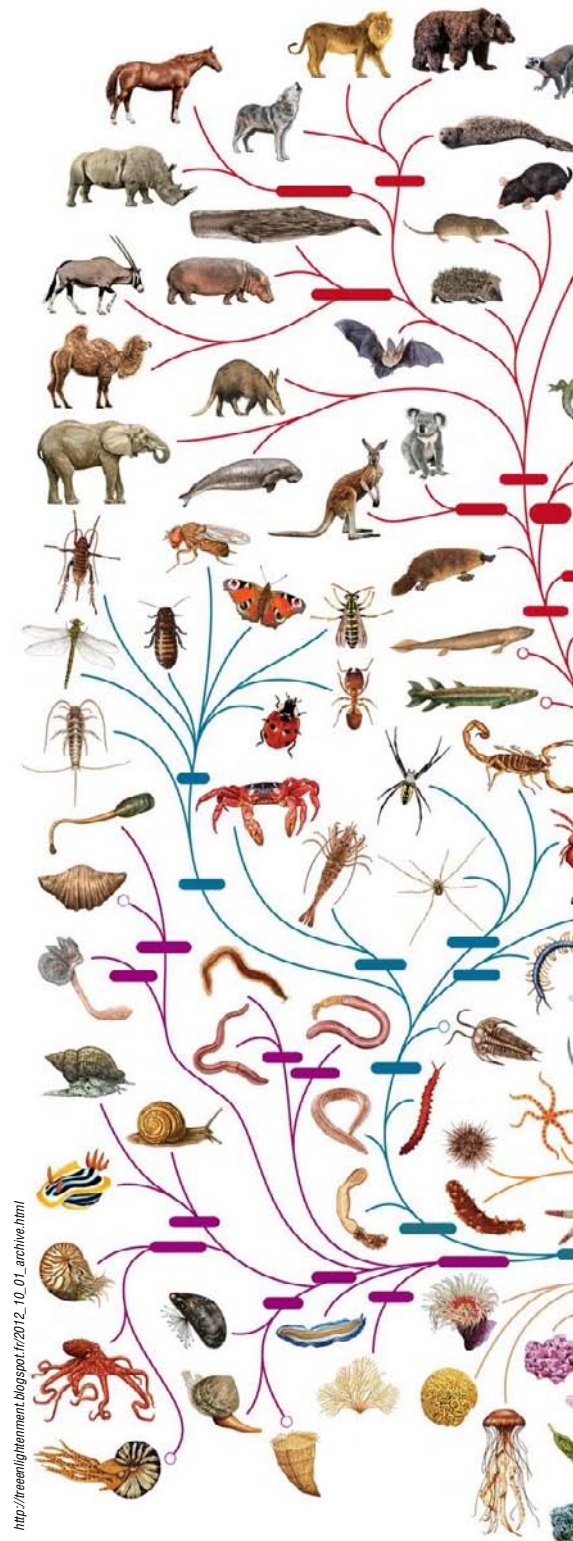
turelle provient de toute évidence d'un processus causal long, mais définissable assez brièvement. En termes informatiques, on dira que ces objets sont le résultat du calcul « d'un programme court ayant fonctionné longtemps ». À la condition d'adopter une conception large de ce qu'est un calcul, l'idée de Ch. Bennett correspond à l'option (b) et elle est donc naturelle. Cette façon large de concevoir le calcul est assez facile maintenant, puisque les développements de l'informatique nous montrent au quotidien que tout processus dynamique peut être simulé par un calcul (ou, à l'inverse, peut être un moyen d'opérer des calculs).

Définition mathématique

L'idée générale de Ch. Bennett est rendue mathématiquement précise de plusieurs façons, dont les plus élémentaires conduisent aisément à des théorèmes. La première version mathématique de la définition de Ch. Bennett consiste à poser que la profondeur logique $P[s]$ de la suite finie s de 0 et de 1 (tout objet physique de taille finie se ramène, par numérisation, à une telle suite) est le temps de calcul (mesuré en nombre de pas de calcul) que le programme le plus court (on le note s^*) qui produit s met pour fabriquer s (s'il existe plusieurs programmes de même taille, on choisit le plus rapide).

Bien sûr, le temps de calcul dépend du langage de programmation utilisé. Cependant, à la condition de choisir un langage assez général (et ceux utilisés en informatique le sont : C, Java, Basic, Python, etc.), la définition de la complexité structurelle proposée par Ch. Bennett varie peu. Cette invariance est bien évidemment centrale et, grâce à elle, la notion de profondeur logique peut être prise au sérieux.

La détermination du plus court programme s^* engendrant s est très difficile et ne réussit pas toujours ! Ce n'est pas très étonnant, car les logiciens ont montré que le passage de s à s^* est non calculable : il n'existe aucun algorithme permettant, pour toute suite s , de connaître le programme s^* et son temps de calcul $P[s]$. Cette indécidabilité algorithmique provient de celle



http://teenlightenment.blogspot.fr/2012/10/01_archive.html

2. LES OBJETS AYANT UNE RICHE ORGANISATION ne surgissent pas de rien et, selon Charles Bennett, ils vérifient une « loi de croissance lente ». Il faut une longue suite de causalités, assimilables à de nombreux calculs, pour engendrer ou décrire de tels objets. Ch. Bennett a démontré que la