courts qui engendrent l'objet apparaît naturelle et conforme au bon sens.

Avant de préciser comment l'idée de Ch. Bennett se traduit mathématiquement, formulons encore un argument en sa faveur à l'aide d'une expérience de pensée. Imaginez que l'on découvre, écrits sur un tronc d'arbre, un milliard de chiffres binaires consécutifs du nombre π matérialisés par des traits longs (pour les 1) et courts (pour les 0). Que faut-il raisonnablement en penser ?

(a) Que cette suite, qui n'en est qu'une parmi $2^{1\,000\,000\,000}$ autres de même longueur, se trouve là par hasard, du fait des intempéries ou du travail aveugle de quelques insectes. Ce serait par pure chance que les traits écrivent un milliard de chiffres binaires de π.

(b) Qu'un processus particulier, physique ou impliquant des humains et un ordinateur, a effectué le calcul de ce milliard de chiffres, qui a ensuite été recopié là. Dans ce cas, l'origine des chiffres serait attachée à un programme assez court ou, ce qui revient au même, à quelques lois physiques dont la description serait brève comparée au milliard d'éléments inscrits sur le tronc d'arbre.

Si vous optez pour *(a)*, vous choisissez une conception proche de celle des biologistes d'avant Pasteur, qui défendaient l'idée de la génération spontanée, soutenant par exemple que des rats naissent parfois d'un tas de chiffons humides abandonnés sans qu'aucun rat n'y soit préalablement passé. L'hypothèse *(b)* correspond à l'idée plus raisonnable, du moins aux yeux de la science moderne, que l'origine des rats dans un tas de chiffons est la même que celle des autres rats : ils sont nés de leurs parents, et sont, comme eux, le produit de l'évolution biologique qui, depuis plus de trois milliards d'années, a élaboré des formes vivantes aux structures de plus en plus riches et délicates. Cette évolution fonctionne selon les lois de la physique et de la chimie, lesquelles font interagir les atomes et molécules, et ces interactions sont assimilables à un calcul.

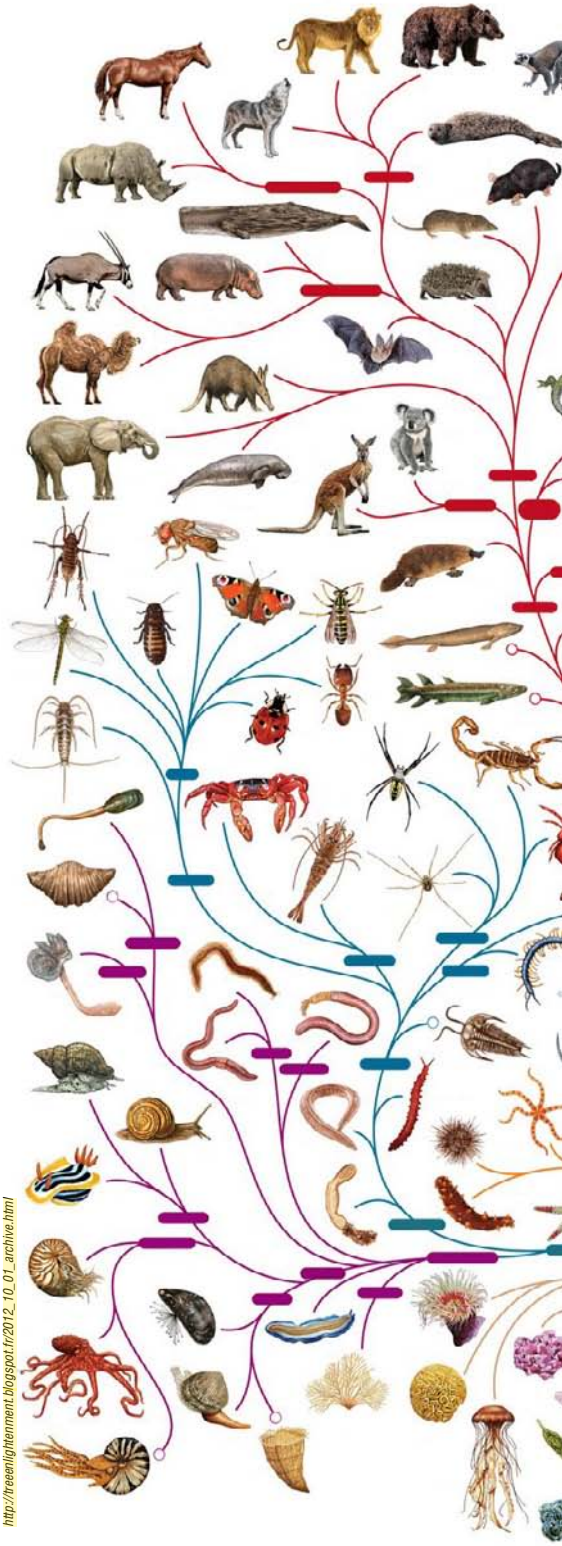
Pour les rats du tas de chiffons, comme pour le milliard de chiffres de π de notre expérience de pensée, la complexité structurelle provient de toute évidence d'un processus causal long, mais définissable assez brièvement. En termes informatiques, on dira que ces objets sont le résultat du calcul « d'un programme court ayant fonctionné longuement ». À la condition d'adopter une conception large de ce qu'est un calcul, l'idée de Ch. Bennett correspond à l'option *(b)* et elle est donc naturelle. Cette façon large de concevoir le calcul est assez facile maintenant, puisque les développements de l'informatique nous montrent au quotidien que tout processus dynamique peut être simulé par un calcul (ou, à l'inverse, peut être un moyen d'opérer des calculs).

Définition mathématique

L'idée générale de Ch. Bennett est rendue mathématiquement précise de plusieurs façons, dont les plus élémentaires conduisent aisément à des théorèmes. La première version mathématique de la définition de Ch. Bennett consiste à poser que la profondeur logique $P(s)$ de la suite finie s de 0 et de 1 (tout objet physique de taille finie se ramène, par numérisation, à une telle suite) est le temps de calcul (mesuré en nombre de pas de calcul) que le programme le plus court (on le note s^*) qui produit s met pour fabriquer s (s'il existe plusieurs programmes de même taille, on choisit le plus rapide).

Bien sûr, le temps de calcul dépend du langage de programmation utilisé. Cependant, à la condition de choisir un langage assez général (et ceux utilisés en informatique le sont : *C, Java, Basic, Python*, etc.), la définition de la complexité structurelle proposée par Ch. Bennett varie peu. Cette invariance est bien évidemment centrale et, grâce à elle, la notion de profondeur logique peut être prise au sérieux.

La détermination du plus court programme s^* engendrant s est très difficile et ne réussit pas toujours ! Ce n'est pas très étonnant, car les logiciens ont montré que le passage de s à s^* est non calculable : il n'existe aucun algorithme permettant, pour toute suite s, de connaître le programme s^* et son temps de calcul $P(s)$. Cette indécidabilité algorithmique provient de celle



http://treeoflightenment.blogspot.fr/2012_10_01_archive.html

2. LES OBJETS AYANT UNE RICHE ORGANISATION ne surgissent pas de rien et, selon Charles Bennett, ils vérifient une « loi de croissance lente ». Il faut une longue suite de causalités, assimilables à de nombreux calculs, pour engendrer ou décrire de tels objets. Ch. Bennett a démontré que la

© Pour la Science - n° 427 - Mai 2013

profondeur logique d'un système en évolution vérifie la loi de croissance lente (d'après laquelle la complexité structurelle ne peut augmenter rapidement), ce qui constitue un argument fort en faveur de sa définition. Cette idée s'appliquerait en particulier à l'évolution des organismes vivants.

démontrée en 1936 par Alan Turing et qui concerne l'arrêt des programmes : aucune méthode d'analyse ne permet de savoir à l'avance si un programme va se mettre à boucler.

Cependant, il ne faut pas tirer de cette impossibilité d'un calcul exact systématique pour tout s de $P(s)$ la conclusion qu'on ne peut pas évaluer $P(s)$. Les algorithmes de compression de données sont des outils qui calculent des versions approchées de s^* et leur utilisation permet l'évaluation de $P(s)$.

De la même façon, la complexité de Kolmogorov de la suite s, qui est la longueur (mesurée en bits) de s^*, n'est pas calculable, mais, grâce aux algorithmes de compression de données, elle est évaluable. Cette possibilité a permis des avancées dans la classification automatique des textes, des partitions musicales et des séquences génétiques. La non-calculabilité n'est pas un obstacle rédhibitoire : nous faisons des mathématiques tout en sachant qu'il n'y a pas de système parfait d'axiomes qui élimine toutes les propositions indécidables.

Complexité aléatoire et complexité structurelle

La complexité de Kolmogorov d'une suite, notion très importante en informatique théorique (et maintenant en physique et en biologie), ne pouvait pas mesurer la complexification évoquée en cosmologie et en biologie. En effet, une suite aléatoire où chaque élément est tiré à pile ou face a une complexité de Kolmogorov maximale (parmi les suites de même longueur) alors que, nous l'avons déjà remarqué, aucune structure n'y est présente en général.

La complexité de Kolmogorov mesure le « contenu en information » d'une suite s, c'est-à-dire la quantité minimale d'information qu'il faut mémoriser pour être capable de reproduire s (même si cette information est sans intérêt, comme c'est le cas pour une suite de tirages à pile ou face). La complexité structurelle, que la profondeur logique de Bennett veut évaluer, est liée à la richesse d'organisation, au nombre de corrélations et d'interactions apparentes ou cachées entre parties de s, à la quantité d'interdépendances des parties, toutes choses absentes dans une suite aléatoire de 0 et de 1.

Cette distinction que nous faisons tous sans en avoir nécessairement conscience entre complexité aléatoire (ou contenu incompressible d'information que mesure la complexité de Kolmogorov, la taille de s^*) et complexité structurelle (celle que Ch. Bennett veut évaluer, et qui en première approximation est le temps de calcul de s^*) est essentielle pour que puisse progresser une théorie générale de la complexité. C'est faute de l'avoir comprise plus tôt et de s'être aperçu que l'impossibilité d'un calcul exact des versions formelles de ces notions (complexité de Kolmogorov et profondeur logique) n'interdisait pas de les utiliser, que l'on a cherché – et que l'on cherche encore parfois – à formuler des définitions particulières de la complexité qui ne s'appliquent que dans des contextes limités.

Des versions mathématiques plus avancées de la profondeur logique de Bennett ont été proposées. Elles ne se contentent pas de faire intervenir le programme le plus court produisant s, mais tous les programmes produisant s qui ne peuvent être compressés de plus de k bits ou même tous les programmes produisant s, mais en accordant plus de poids aux programmes les plus courts qui sont considérés comme des origines plus probables de l'objet s. Ces versions ont de meilleures propriétés que $P(s)$, dont celle d'autoriser la démonstration d'une « loi de croissance lente » (la complexité structurelle ne peut pas croître rapidement). Malheureusement, ces définitions sont plus délicates à mettre en application que la définition de base $P(s)$.

Une série d'avancées dans la compréhension et l'utilisation de la profondeur logique de Bennett ont eu lieu depuis sa définition en 1977. Il faut les voir comme la confirmation que l'idée de Ch. Bennett est pertinente et que, même si rien n'est très facile dans ce domaine soumis à de nombreuses « indécidabilités », il faut poursuivre son étude. La profondeur de Bennett, ne serait-ce que d'une manière abstraite, nous aide à mieux cerner la complexité dont notre compréhension intuitive

© Pour la Science - n° 427 - Mai 2013