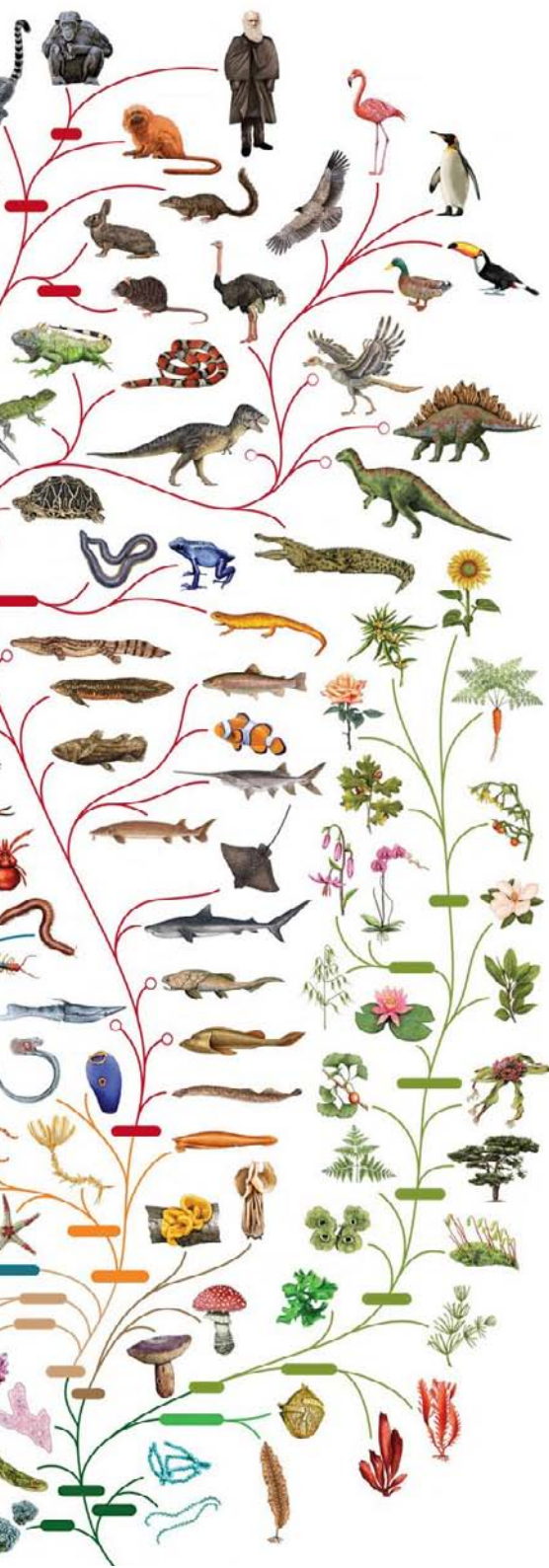




profondeur logique d'un système en évolution vérifie la loi de croissance lente (d'après laquelle la complexité structurelle ne peut augmenter rapidement), ce qui constitue un argument fort en faveur de sa définition. Cette idée s'appliquerait en particulier à l'évolution des organismes vivants.

démontrée en 1936 par Alan Turing et qui concerne l'arrêt des programmes : aucune méthode d'analyse ne permet de savoir à l'avance si un programme va se mettre à boucler.

Cependant, il ne faut pas tirer de cette impossibilité d'un calcul exact systématique pour tout s de $P(s)$ la conclusion qu'on ne peut pas évaluer $P(s)$. Les algorithmes de compression de données sont des outils qui calculent des versions approchées de s^* et leur utilisation permet l'évaluation de $P(s)$.

De la même façon, la complexité de Kolmogorov de la suite s , qui est la longueur (mesurée en bits) de s^* , n'est pas calculable, mais, grâce aux algorithmes de compression de données, elle est évaluable. Cette possibilité a permis des avancées dans la classification automatique des textes, des partitions musicales et des séquences génétiques. La non-calculabilité n'est pas un obstacle rédhibitoire : nous faisons des mathématiques tout en sachant qu'il n'y a pas de système parfait d'axiomes qui élimine toutes les propositions indécidables.

Complexité aléatoire et complexité structurelle

La complexité de Kolmogorov d'une suite, notion très importante en informatique théorique (et maintenant en physique et en biologie), ne pouvait pas mesurer la complexification évoquée en cosmologie et en biologie. En effet, une suite aléatoire où chaque élément est tiré à pile ou face a une complexité de Kolmogorov maximale (parmi les suites de même longueur) alors que, nous l'avons déjà remarqué, aucune structure n'y est présente en général.

La complexité de Kolmogorov mesure le « contenu en information » d'une suite s , c'est-à-dire la quantité minimale d'information qu'il faut mémoriser pour être capable de reproduire s (même si cette information est sans intérêt, comme c'est le cas pour une suite de tirages à pile ou face). La complexité structurelle, que la profondeur logique de Bennett veut évaluer, est liée à la richesse d'organisation, au nombre de corrélations et d'interactions apparentes ou cachées entre parties de s , à la quan-

tité d'interdépendances des parties, toutes choses absentes dans une suite aléatoire de 0 et de 1.

Cette distinction que nous faisons tous sans en avoir nécessairement conscience entre complexité aléatoire (ou contenu incompressible d'information que mesure la complexité de Kolmogorov, la taille de s^*) et complexité structurelle (celle que Ch. Bennett veut évaluer, et qui en première approximation est le temps de calcul de s^*) est essentielle pour que puisse progresser une théorie générale de la complexité. C'est faute de l'avoir comprise plus tôt et de s'être aperçu que l'impossibilité d'un calcul exact des versions formelles de ces notions (complexité de Kolmogorov et profondeur logique) n'interdisait pas de les utiliser, que l'on a cherché – et que l'on cherche encore parfois – à formuler des définitions particulières de la complexité qui ne s'appliquent que dans des contextes limités.

Des versions mathématiques plus avancées de la profondeur logique de Bennett ont été proposées. Elles ne se contentent pas de faire intervenir le programme le plus court produisant s , mais tous les programmes produisant s qui ne peuvent être compressés de plus de k bits ou même tous les programmes produisant s , mais en accordant plus de poids aux programmes les plus courts qui sont considérés comme des origines plus probables de l'objet s . Ces versions ont de meilleures propriétés que $P(s)$, dont celle d'autoriser la démonstration d'une « loi de croissance lente » [la complexité structurelle ne peut pas croître rapidement]. Malheureusement, ces définitions sont plus délicates à mettre en application que la définition de base $P(s)$.

Une série d'avancées dans la compréhension et l'utilisation de la profondeur logique de Bennett ont eu lieu depuis sa définition en 1977. Il faut les voir comme la confirmation que l'idée de Ch. Bennett est pertinente et que, même si rien n'est très facile dans ce domaine soumis à de nombreuses « indécidabilités », il faut poursuivre son étude. La profondeur de Bennett, ne serait-ce que d'une manière abstraite, nous aide à mieux cerner la complexité dont notre compréhension intuitive