

Évaluation expérimentale de $K(s)$ et $P(s)$

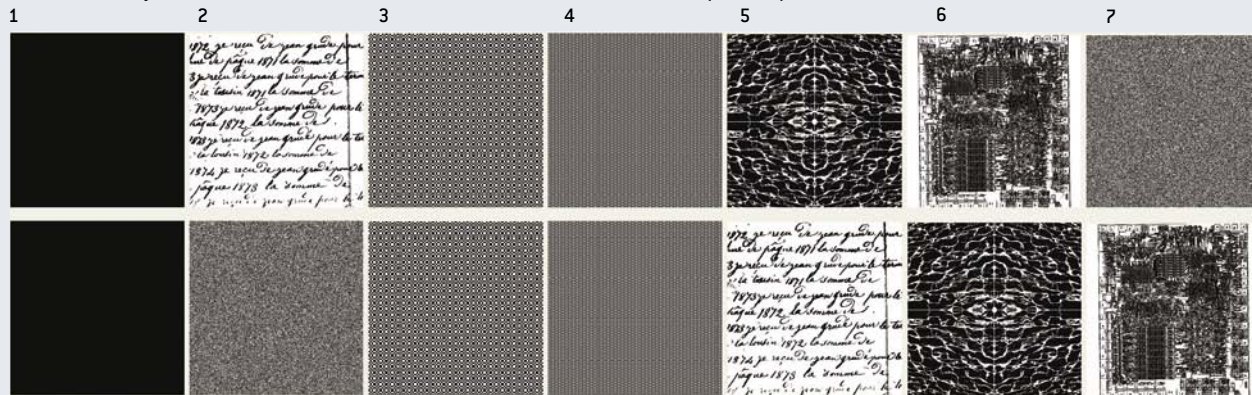
Un programme de compression de données permet d'évaluer la complexité de Kolmogorov et la profondeur logique de Bennett. La version compressée d'un fichier doit être vue comme un court programme engendrant le fichier : sa taille indique une valeur approchée de la complexité de Kolmogorov, et le temps nécessaire à la décompression du fichier est assimilable au temps de calcul pour reproduire le fichier initial, donc à une évaluation de sa profondeur logique. Les expériences ont été réalisées par Hector Zenil, Cédric Gaucherel et l'auteur (J.-P. Delahaye).

Sept images de même format ont été compressées avec un algorithme de compression sans perte : l'image retrouvée après décompression est exactement celle avant compression. La première série indique le classement des images par ordre croissant de taille du fichier compressé, donc par complexité de Kolmogorov $K(s)$ croissante. Sans surprise, on trouve que l'image toute noire (image 1) a le contenu en information le plus petit, et que l'image composée de pixels tirés aléatoirement (image 7) est celle qui exige la plus grande quantité de mémoire ($K(s)$ maximal). Les autres

images sont classées à peu près comme on s'y attend : le manuscrit (image 2) demande assez peu de mémoire, car il y a beaucoup de blanc ; un réseau périodique (image 3) ; une courbe de Peano (image 4) ; une image irrégulière, mais avec deux axes de symétrie (image 5) ; un microprocesseur (image 6).

La seconde série d'images reprend les mêmes sept images, mais cette fois par ordre croissant de temps de décompression, ce qui donne des valeurs approchées de la profondeur logique de Bennett $P(s)$, donc un classement par complexité structurelle croissante. L'image 7 du premier classement, qui est parfaitement aléatoire, est maintenant parmi les premières, conformément à l'idée qu'un hasard parfait est totalement sans structure. Le microprocesseur est bien identifié comme le plus complexe structurellement. La courbe de Peano est, sans surprise, toujours considérée comme contenant des structures un peu plus riches que le motif périodique. Le texte écrit et le motif symétrique changent de position, donnant au total un classement compatible à ce qui, intuitivement, correspond à une complexité structurelle croissante.

croissante. L'image 7 du premier classement, qui est parfaitement aléatoire, est maintenant parmi les premières, conformément à l'idée qu'un hasard parfait est totalement sans structure. Le microprocesseur est bien identifié comme le plus complexe structurellement. La courbe de Peano est, sans surprise, toujours considérée comme contenant des structures un peu plus riches que le motif périodique. Le texte écrit et le motif symétrique changent de position, donnant au total un classement compatible à ce qui, intuitivement, correspond à une complexité structurelle croissante.



doit maintenant devenir mathématique et scientifique.

Parmi les tentatives de définition d'une mesure de complexité structurelle, certaines, issues de la théorie du calcul, sont différentes de celle de Ch. Bennett. Elles sont en compétition avec l'idée de Ch. Bennett et il est donc nécessaire de comprendre s'il s'agit de notions liées.

La notion de « sophistication » introduite par l'Israélien Moshe Koppel et le Français Henri Atlan, et la notion de « complexité effective » des Américains Seth Lloyd et Murray Gell-Mann se fondent sur l'idée d'une séparation possible entre la composante aléatoire et la composante organisée d'un objet. L'idée des définitions proposées par ces chercheurs sous des formes mathématiques qui en masquent parfois le côté naturel est la suivante. Quand on examine

un programme produisant un objet, il est souvent possible d'y reconnaître deux parties : l'une représente ce qui fixe et décrit la structure de l'objet, l'autre est ce qui habille la structure par des éléments de moindre importance, voire aléatoires.

La partie non aléatoire

Considérons par exemple une suite finie de paires de chiffres binaires 00 ou 11 dont la succession est aléatoire : $s = 00\ 11\ 11\ 00\ 00\ 00\ 11\ 00\ 11\ 00\ 00\ 11\ 11$. Le plus court programme s^* produisant cette suite comportera deux parties assez faciles à identifier, car il sera de la forme : « Imprimer, en doublant chaque chiffre, la suite 011000101001011. »

La structure régulière de s est exprimée par la partie « Imprimer en doublant chaque

chiffre ». La composante désordonnée se trouve, quant à elle, dans la partie descriptive et incompressible de 0 et de 1 qui termine le programme.

Lorsqu'on aura affaire à une suite s plus structurée que celle de notre exemple, la longueur de la partie non aléatoire sera supérieure. C'est cette longueur qui, selon M. Koppel, H. Atlan, S. Lloyd et M. Gell-Mann, mesure la richesse en organisation, la complexité structurelle de la suite s .

La partie du programme où l'on a inscrit la séquence 011000101001011 est d'autant plus longue que la séquence s comporte beaucoup d'éléments aléatoires. C'est la partie aléatoire de la séquence et sa longueur est, en gros, la complexité de Kolmogorov de s .

Des difficultés techniques rendent délicate la formulation mathématique de cette idée de séparation en deux parties d'un pro-