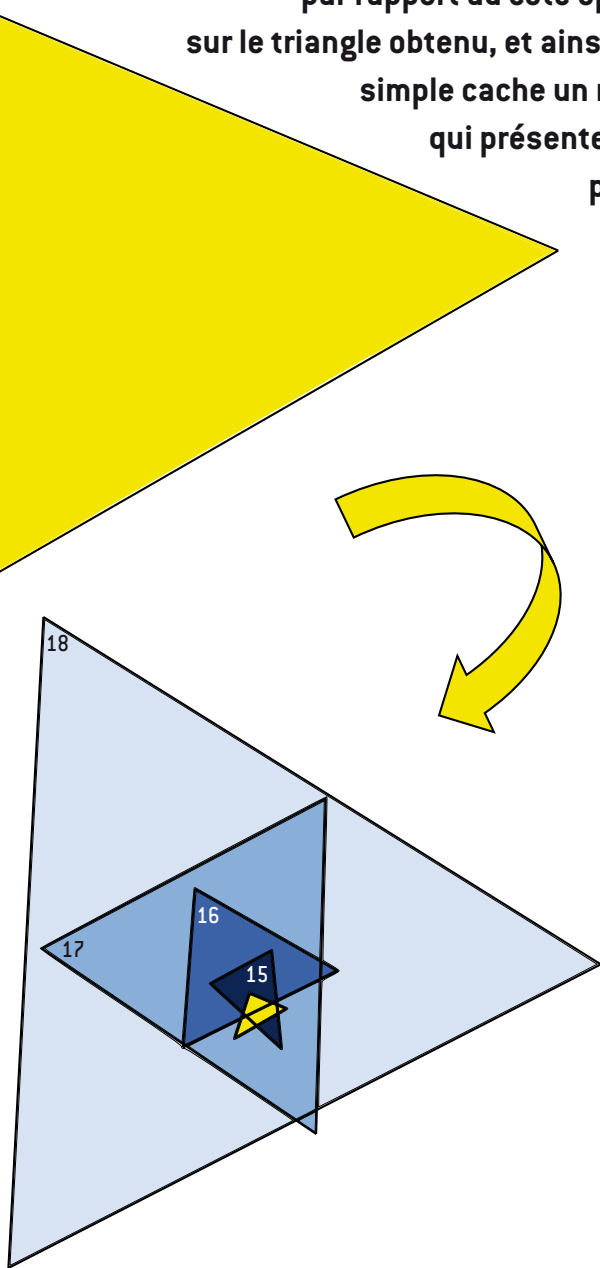


RÉFLEXION

Dessinez un triangle, puis construisez-en un nouveau en prenant, pour chaque sommet, le point symétrique par rapport au côté opposé. Répétez l'opération sur le triangle obtenu, et ainsi de suite. Cette procédure simple cache un riche système dynamique, qui présente des suites convergentes, périodiques ou chaotiques.



L'ESSENTIEL

- Étant donné un triangle, le « triangle de réflexion » est obtenu en effectuant sur chacun des sommets initiaux une symétrie de réflexion par rapport au côté qui lui fait face.
- L'itération de cette transformation forme une suite de triangles qui peut se comporter de diverses façons, selon le triangle initial.
- En ne considérant que la forme des triangles, on peut caractériser la dynamique du système et classer les triangles en fonction du caractère convergent, périodique ou chaotique des suites engendrées.

Toutes les illustrations sont de l'auteur

Le triangle, défini par trois points, ses sommets, est l'un des objets géométriques les plus élémentaires, et pourtant les mathématiciens n'ont pas fini d'explorer son univers. La géométrie classique a construit une multitude d'objets à partir d'un tel trio de points et en a découvert de nombreuses propriétés. Il suffit de penser aux trois médiatrices du triangle, qui se coupent en un même point, comme c'est par ailleurs le cas de ses bissectrices, de ses hauteurs et de ses médianes – des propriétés bien connues, mais remarquables et fort utiles pour résoudre de nombreuses questions de nature géométrique.

D'autres propriétés géométriques intéressantes ont été obtenues en construisant, à partir d'un triangle donné et selon une certaine procédure, un autre triangle. On peut répéter cette opération, et étudier la suite des résultats successifs. C'est ce que j'ai effectué récemment sur les triangles construits l'un à partir de l'autre par une opération de réflexion. Comme je le détaillerai ici, les suites de tels triangles forment un système dynamique dont le comportement est riche ; en particulier, il présente une évolution chaotique dans de nombreux cas.

Un triangle peut donner naissance à un nouveau triangle de bien des façons. Par exemple, on peut choisir comme sommets du nouveau triangle les milieux des côtés de l'ancien (voir la figure 2). Ou alors les pieds des bissectrices – les points où la bissectrice d'un angle coupe le côté opposé. Ou encore les pieds des hauteurs – les points où la perpendiculaire issue d'un sommet coupe le côté opposé ou son prolongement.

De telles constructions sont des transformations qui, à chaque triangle, font correspondre un nouveau triangle. On peut appliquer la même transformation à ce dernier, puis soumettre à son tour le triangle ainsi obtenu à cette opération, et ainsi de suite, en principe indéfiniment : on dit que l'on itère la transformation. Avec une telle itération, on pénètre dans un domaine actuel des mathématiques. Les fonctions itérées sont en effet un sujet central de la théorie des systèmes dynamiques, à laquelle on a parfois donné le nom réducteur de « théorie du chaos ».

Par ses implications philosophiques, cette théorie a acquis une notoriété hors du milieu des mathématiciens : elle montre que le déterminisme de la transformation cohabite parfois avec l'imprévisibilité de l'évolution à long terme. Autrement dit,

même si l'on connaît exactement l'état initial du système, par exemple le triangle donné au départ, on n'est pas en mesure de prévoir ses lointains descendants.

Malgré l'imprévisibilité, les mathématiciens parviennent à dégager certaines structures dans ce « chaos déterministe ». C'est le cas avec le système dynamique formé par les triangles de réflexion : j'ai déchiffré les aspects chaotiques de son comportement et classé les états initiaux selon leur évolution, bien ordonnée ou anarchique.

La forme fait toute la différence

Avant d'explorer ce système, commençons par quelques remarques générales sur les transformations itérées de triangles. La première est que, pour se concentrer sur l'essentiel, il est parfois utile de négliger certaines propriétés des triangles. Ainsi, la position et l'orientation de ces figures dans le plan seront ici sans importance, en général. Nous aurons la liberté de déplacer les triangles et de les tourner ou, ce qui revient au même, de modifier la position de l'observateur : le triangle reste fondamentalement le même. De façon similaire, peu importe qu'on regarde le triangle de près ou de loin : sa taille absolue ne jouera aucun rôle.

Nous considérerons souvent deux triangles comme égaux dès qu'ils ont la même forme, c'est-à-dire dès qu'on peut les faire coïncider par rotation, translation, symétrie axiale, dilatation ou contraction. Pour ce genre d'égalité (de « similitude »), il suffit que les triangles aient les mêmes angles.

Un triangle initial (le « triangle père ») étant donné, prenons comme sommets du nouveau triangle (le « triangle fils ») les milieux des côtés de l'ancien. Le triangle fils, le « triangle médian », est une copie à l'échelle 1 : 2 du triangle père tourné de 180 degrés (voir la figure 2a). La suite des triangles itérés converge vers un point, qui est leur centre de gravité (barycentre) commun. En considérant que des triangles semblables sont égaux, c'est-à-dire en ne considérant que les angles, on peut dire que cette transformation ne fait rien. Elle laisse inchangé tout triangle.

Il est plus intéressant de choisir les pieds des bissectrices comme nouveaux sommets (voir la figure 2b). La suite des triangles ainsi formés se resserre à nouveau sur un point, mais ce dernier ne se laisse plus décrire explicitement. Si l'on

fait abstraction de leur taille absolue et de leur position, ces triangles convergent vers une forme équilatérale. Ce fait, loin d'être évident, n'a été démontré qu'en 2006 par Dan Ismailescu et Jacqueline Jacobs, de l'Université Hofstra, aux États-Unis.

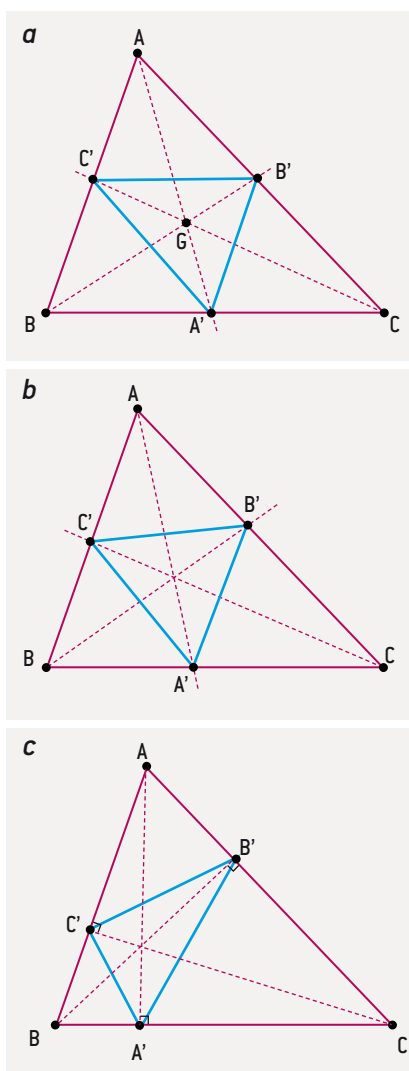
Cette transformation fondée sur les bissectrices atténue peu à peu les différences entre les triangles : si on l'applique à deux triangles de forme différente, leurs images par la transformation se distinguent déjà moins que les originaux, les images de la deuxième itération encore moins, etc. Progressivement, on se rapproche ainsi de la forme limite commune équilatérale. C'est le contraire d'un comportement chaotique.

Pour qu'apparaisse du chaos, il est nécessaire (mais pas suffisant) que la transformation accentue les différences, au moins par endroits. Un exemple de transformation qui présente du chaos consiste à passer du triangle père à son triangle « orthique », dont les sommets sont les pieds des hauteurs du triangle initial (voir la figure 2c). Pour l'essentiel, cette transformation double les différences.

Elle ne peut évidemment pas simplement doubler les angles, car la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180 degrés. Plus précisément, un angle α du triangle initial devient, dans le triangle orthique, 2α , $180^\circ - 2\alpha$ ou $2\alpha - 180^\circ$; les différences entre les angles de deux triangles initiaux sont doublées par la transformation lorsque ces triangles sont tous les deux obtusangles (ayant un angle supérieur à l'angle droit), ou tous les deux acutangles.

Pourquoi cette transformation engendre-t-elle un chaos déterministe ? L'un des signes distinctifs du chaos est la sensibilité extrême du système aux conditions initiales. Or la transformation orthique présente cette sensibilité, en raison du doublement des différences décrit ci-dessus : deux triangles pères qui se distinguent aussi peu que l'on veut peuvent donner des suites de triangles orthiques aux comportements complètement différents.

L'ergodicité, autrement dit le caractère mélangeant du processus, est un autre signe distinctif du chaos : les triangles d'une même suite orthique s'approchent en général infiniment près de toutes les formes de triangles. Cette propriété a été démontrée en 1990, en s'appuyant sur des travaux antérieurs d'autres personnes, par les mathématiciens d'origine hongroise Peter Lax (lauréat du prix Abel en 2005), et Peter Ungar, de l'Institut Courant de New York.



2. TROIS FAÇONS DIFFÉRENTES de construire un nouveau triangle $A'B'C'$ à partir d'un triangle donné ABC : à partir des milieux des côtés de ABC (« triangle médian » dont le barycentre est en G , a), à partir des intersections des bissectrices avec les côtés [b], à partir des intersections des hauteurs avec les côtés (« triangle orthique », c).