

Explicitons brièvement cette propriété. On peut se représenter l'espace de tous les états imaginables du système (dans notre cas l'espace des triangles) comme une grande marmite de soupe. Le système dynamique qui transforme tout triangle en son triangle orthique agit comme une gigantesque spatule qui brasse le contenu de la marmite. Au cours du temps, chaque particule de soupe va partout à l'intérieur de la marmite. Comme d'habitude dans les systèmes ergodiques, certaines particules exceptionnelles ne participent pas totalement à ce grand brassage. Mais l'ensemble de ces exceptions est de « mesure nulle », ce qui signifie que la probabilité de tomber sur l'une d'entre elles par hasard est nulle.

Abordons maintenant la suite de triangles qui est au cœur de cet article, les triangles de réflexion. Un triangle étant donné, prenons le point symétrique de chaque sommet par rapport au côté opposé ou à son prolongement (voir la figure 3a). Cette opération donne les sommets d'un nouveau triangle, le « triangle de réflexion ».

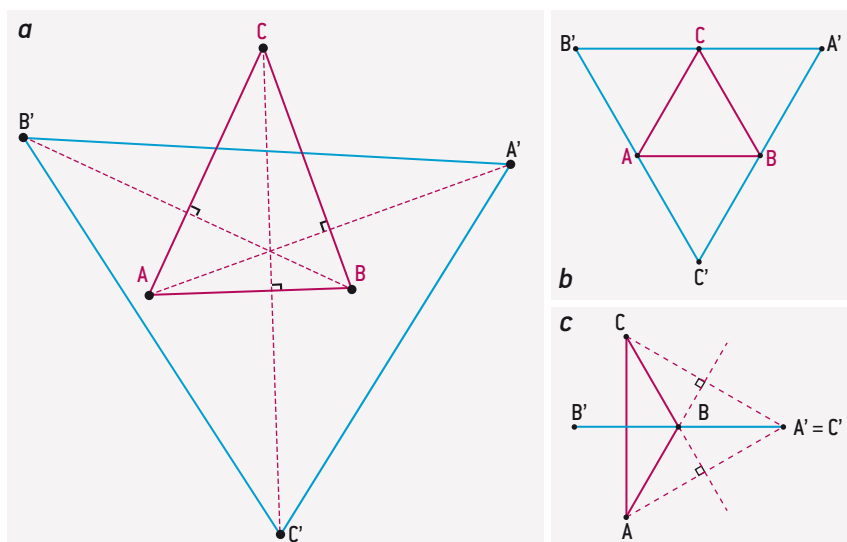
Le système dynamique associé à l'itération de cette transformation présente, comme pour les triangles orthiques, du chaos. Mais, comme on va le voir, sa structure s'est révélée bien plus riche.

Les triangles de réflexion, un système riche

Commençons par quelques observations. Le triangle de réflexion d'un triangle équilatéral est lui aussi équilatéral (voir la figure 3b). Un triangle dont les angles valent 30, 30 et 120 degrés se transforme en un triangle dégénéré aux sommets alignés, dont les côtés occupent la même droite (voir la figure 3c). Et un triangle dégénéré reste dégénéré au cours des itérations successives.

Il suffit de quelques exemples pour se convaincre qu'une suite de triangles de réflexion itérés peut se montrer chaotique (voir la figure 4), même si l'on considère deux triangles comme égaux dès qu'ils ont les mêmes angles, donc la même forme. Mais lorsqu'aucun angle du triangle initial ne dépasse 90 degrés, il semble que les triangles de réflexion successifs deviennent de plus en plus grands et tendent vers une forme limite équilatérale (voir la figure 1).

Pour progresser dans l'analyse, il faut exprimer les angles du triangle de réflexion à partir des angles du triangle père, et ce



3. LE TRIANGLE DE RÉFLEXION A'B'C' s'obtient du triangle initial ABC par la procédure simple suivante (a) : la hauteur issue du sommet A est doublée, ce qui définit un nouveau sommet A', et de même pour les deux autres sommets B et C. Après une telle opération, un triangle équilatéral reste équilatéral, mais voit la longueur de ses côtés doubler (b). Un triangle isocèle dont les angles mesurent 30, 30 et 120 degrés se transforme en un triangle aux sommets alignés, dégénéré en un segment (c).

par une formule efficace dont l'évolution au cours des itérations est aussi transparente que possible. L'entreprise se révèle bien plus difficile que pour le triangle orthique. La bonne idée est de considérer les sinus des angles α , β et γ du triangle, et de caractériser la forme de ce dernier par les deux grandeurs :

$$s = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma,$$

$$p = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$$

(la somme et le produit des carrés des sinus des angles). On peut retrouver les trois angles du triangle à partir de s et p (connaissant deux des angles, on en déduit le troisième, la somme des angles d'un triangle valant toujours 180 degrés). Grâce à quelques acrobaties avec les formules trigonométriques, on passe des valeurs s et p du triangle père aux grandeurs correspondantes s' et p' du triangle fils construit par réflexion :

$$s' = [(s + 16p)(4s - 5)^2] / [4s + 1 + 64p(4s - 7)],$$

$$p' = p(4s - 5)^6 / [4s + 1 + 64p(4s - 7)]^2.$$

Ces formules ont été publiées pour la première fois en 1984 par le Hollandais Jan van IJzeren (1914-1998), un spécialiste de géométrie, statisticien et juriste. Son article, paru en néerlandais dans un rapport interne de l'Université d'Eindhoven, est rapidement tombé dans l'oubli ; Internet m'a heureusement permis d'en retrouver la trace. L'intérêt des formules de van IJzeren est que, malgré leur apparente complexité, elles se laissent apprivoiser au point de livrer les clefs du problème qui nous occupe.

On peut souligner divers résultats. Par exemple, la transformation de réflexion d'un triangle n'est pas inversible. Certes, à un triangle père correspond toujours un seul triangle fils, mais un triangle non dégénéré a cinq, six ou sept triangles pères, dont certains sont éventuellement de même forme. Un triangle a sept pères lorsqu'il est équilatéral ou presque (voir la figure 5).

On peut par ailleurs confirmer par une preuve mathématique l'impression laissée par nos premières observations : si l'on part d'un triangle acutangle ou rectangle (dont aucun angle ne dépasse 90 degrés), les triangles de réflexion successifs tendent effectivement vers la forme équilatérale. Une autre forme limite n'est ainsi possible que lorsque le triangle initial est obtusangle.

Un triangle non dégénéré a pour fils un triangle dégénéré (d'angles 0, 0 et 180 degrés) si et seulement si la somme des carrés des sinus de ses angles est $s = 5/4$. Ces triangles existent en une infinité de formes différentes ; mais il y en a un seul qui soit isocèle, c'est celui dont les angles valent 30, 30 et 120 degrés.

Afin de délimiter au mieux l'empire du chaos, nous devons détecter toutes les traces d'ordre présentes dans l'itération de la transformation de réflexion. Il s'agit par exemple de repérer les triangles dont la forme ne change pas au cours des itérations – ce sont les « points fixes » de la transformation – ou ceux qui parcourent en boucle un nombre fini de formes.