

Explicitons brièvement cette propriété. On peut se représenter l'espace de tous les états imaginables du système (dans notre cas l'espace des triangles) comme une grande marmite de soupe. Le système dynamique qui transforme tout triangle en son triangle orthique agit comme une gigantesque spatule qui brasse le contenu de la marmite. Au cours du temps, chaque particule de soupe va partout à l'intérieur de la marmite. Comme d'habitude dans les systèmes ergodiques, certaines particules exceptionnelles ne participent pas totalement à ce grand brassage. Mais l'ensemble de ces exceptions est de « mesure nulle », ce qui signifie que la probabilité de tomber sur l'une d'entre elles par hasard est nulle.

Abordons maintenant la suite de triangles qui est au cœur de cet article, les triangles de réflexion. Un triangle étant donné, prenons le point symétrique de chaque sommet par rapport au côté opposé ou à son prolongement (voir la figure 3a). Cette opération donne les sommets d'un nouveau triangle, le « triangle de réflexion ».

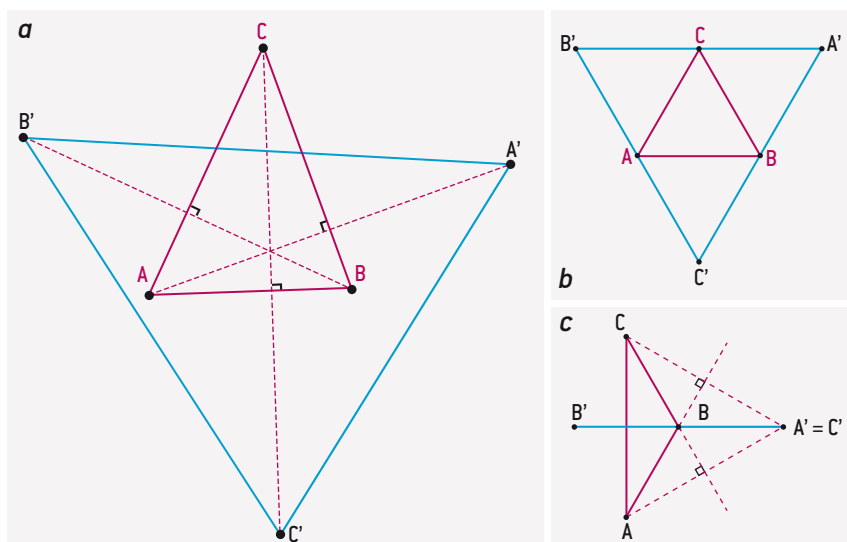
Le système dynamique associé à l'itération de cette transformation présente, comme pour les triangles orthiques, du chaos. Mais, comme on va le voir, sa structure s'est révélée bien plus riche.

Les triangles de réflexion, un système riche

Commençons par quelques observations. Le triangle de réflexion d'un triangle équilatéral est lui aussi équilatéral (voir la figure 3b). Un triangle dont les angles valent 30, 30 et 120 degrés se transforme en un triangle dégénéré aux sommets alignés, dont les côtés occupent la même droite (voir la figure 3c). Et un triangle dégénéré reste dégénéré au cours des itérations successives.

Il suffit de quelques exemples pour se convaincre qu'une suite de triangles de réflexion itérés peut se montrer chaotique (voir la figure 4), même si l'on considère deux triangles comme égaux dès qu'ils ont les mêmes angles, donc la même forme. Mais lorsqu'aucun angle du triangle initial ne dépasse 90 degrés, il semble que les triangles de réflexion successifs deviennent de plus en plus grands et tendent vers une forme limite équilatérale (voir la figure 1).

Pour progresser dans l'analyse, il faut exprimer les angles du triangle de réflexion à partir des angles du triangle père, et ce



3. LE TRIANGLE DE RÉFLEXION A'B'C' s'obtient du triangle initial ABC par la procédure simple suivante (a) : la hauteur issue du sommet A est doublée, ce qui définit un nouveau sommet A', et de même pour les deux autres sommets B et C. Après une telle opération, un triangle équilatéral reste équilatéral, mais voit la longueur de ses côtés doubler (b). Un triangle isocèle dont les angles mesurent 30, 30 et 120 degrés se transforme en un triangle aux sommets alignés, dégénéré en un segment (c).

par une formule efficace dont l'évolution au cours des itérations est aussi transparente que possible. L'entreprise se révèle bien plus difficile que pour le triangle orthique. La bonne idée est de considérer les sinus des angles α , β et γ du triangle, et de caractériser la forme de ce dernier par les deux grandeurs :

$$s = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma,$$

$$p = \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma$$

(la somme et le produit des carrés des sinus des angles). On peut retrouver les trois angles du triangle à partir de s et p (connaissant deux des angles, on en déduit le troisième, la somme des angles d'un triangle valant toujours 180 degrés). Grâce à quelques acrobaties avec les formules trigonométriques, on passe des valeurs s et p du triangle père aux grandeurs correspondantes s' et p' du triangle fils construit par réflexion :

$$s' = [(s + 16p)(4s - 5)^2] / [4s + 1 + 64p(4s - 7)],$$

$$p' = p(4s - 5)^6 / [4s + 1 + 64p(4s - 7)]^2.$$

Ces formules ont été publiées pour la première fois en 1984 par le Hollandais Jan van IJzeren (1914-1998), un spécialiste de géométrie, statisticien et juriste. Son article, paru en néerlandais dans un rapport interne de l'Université d'Eindhoven, est rapidement tombé dans l'oubli ; Internet m'a heureusement permis d'en retrouver la trace. L'intérêt des formules de van IJzeren est que, malgré leur apparente complexité, elles se laissent apprivoiser au point de livrer les clefs du problème qui nous occupe.

On peut souligner divers résultats. Par exemple, la transformation de réflexion d'un triangle n'est pas inversible. Certes, à un triangle père correspond toujours un seul triangle fils, mais un triangle non dégénéré a cinq, six ou sept triangles pères, dont certains sont éventuellement de même forme. Un triangle a sept pères lorsqu'il est équilatéral ou presque (voir la figure 5).

On peut par ailleurs confirmer par une preuve mathématique l'impression laissée par nos premières observations : si l'on part d'un triangle acutangle ou rectangle (dont aucun angle ne dépasse 90 degrés), les triangles de réflexion successifs tendent effectivement vers la forme équilatérale. Une autre forme limite n'est ainsi possible que lorsque le triangle initial est obtusangle.

Un triangle non dégénéré a pour fils un triangle dégénéré (d'angles 0, 0 et 180 degrés) si et seulement si la somme des carrés des sinus de ses angles est $s = 5/4$. Ces triangles existent en une infinité de formes différentes ; mais il y en a un seul qui soit isocèle, c'est celui dont les angles valent 30, 30 et 120 degrés.

Afin de délimiter au mieux l'empire du chaos, nous devons détecter toutes les traces d'ordre présentes dans l'itération de la transformation de réflexion. Il s'agit par exemple de repérer les triangles dont la forme ne change pas au cours des itérations – ce sont les « points fixes » de la transformation – ou ceux qui parcourent en boucle un nombre fini de formes.

Comme nous l'avons vu, le triangle équilatéral est un point fixe. Il en est de même du triangle dégénéré : son triangle fils est également dégénéré.

Quatre points fixes de la transformation

En résolvant les équations couplées $s' = s$ et $p' = p$, on montre que la transformation a deux autres points fixes. Le premier de ces triangles a des angles d'environ 17,027, 32,132 et 130,84 degrés (ces angles ne sont vraisemblablement pas des fractions rationnelles de 180 degrés), correspondant à $s = (6 - \sqrt{5})/4$ et $p = (8\sqrt{5} - 17)/64$. Si l'on introduit ces valeurs de s et p dans les formules de van IJzeren, on obtient bien $s' = s$ et $p' = p$.

Le quatrième point fixe, déjà connu avant mes travaux, est le triangle heptagonal pour lequel $s = 7/4$ et $p = 7/64$; ses

angles sont égaux aux fractions $1/7$, $2/7$ et $4/7$ de 180 degrés, soit environ 25,7, 51,4 et 102,9 degrés. On l'obtient à partir d'un heptagone régulier (polygone ayant sept côtés) en prenant le premier, le deuxième et le quatrième sommets.

Il existe sept couples de triangles où chaque partenaire est, quant à la forme, le triangle de réflexion de l'autre : la suite des transformations itérées est alors de période 2 (la même forme de triangle apparaît toutes les deux transformations). Il existe 32 groupes de trois triangles dont la transformation parcourt les formes en boucle (toutes les trois transformations). Nous déterminerons plus loin explicitement l'un de ces 32 groupes. De la même façon, il existe des cycles qui durent quatre, cinq, ..., ou un nombre fini quelconque de réflexions.

À l'exception du point fixe équilatéral, qui attire tous les triangles proches de lui

lors de l'itération de la transformation, tous les autres points fixes et cycles sont répulsifs : les triangles dont la forme est très proche de la leur ont des fils d'aspect moins proche, et le seul moyen de rejoindre un tel point fixe ou cycle est d'en être un ancêtre.

Dans une infinité de cas, les réflexions successives d'un triangle initial ne tendent vers aucune forme stable ni vers aucun cycle de formes qui se répètent, mais errent à jamais dans le vaste univers des triangles obtusangles : leur devenir est chaotique.

Pour acquérir une vue d'ensemble du chaos des triangles de réflexion, on peut dresser une sorte de carte topographique où chaque triangle est représenté par un point dont les coordonnées sont ses deux plus petits angles α et β (voir l'encadré ci-dessous).

Sur cette carte, on peut déplacer chaque point représentatif d'un triangle vers le point représentatif de son triangle de réflexion.

LA CARTE DU MONDE DES TRIANGLES

La forme d'un triangle est entièrement déterminée par ses deux angles α et β les plus petits (le troisième angle est égal à $180^\circ - (\alpha + \beta)$).

On choisit $\alpha \geq \beta$. Chaque point (α, β) de la zone colorée du plan figurée ici correspond à un triangle, ou plus exactement à une forme de triangle. Le point $(0, 0)$ correspond à tous les triangles dégénérés en un segment (ceux dont les trois sommets sont alignés). Les deux angles aux extrémités du segment sont nuls ; le troisième vaut 180° et se situe quelque part sur le segment, mais sa position exacte est sans importance.

Le bord inférieur de la zone colorée ($\alpha > 0, \beta = 0$) correspond à des triangles dégénérés d'une autre espèce (dont on ne traite pas dans cet article), ceux dont deux des trois côtés sont parallèles et se rencontrent à l'infini avec l'angle $\beta = 0$. Le troisième côté est un segment ordinaire de longueur finie et forme l'angle intérieur α avec l'une des parallèles.

La construction du triangle de réflexion se traduit par une fonction qui envoie chaque point de la zone colorée (chaque triangle) sur le point correspondant à son triangle de réflexion. Tout triangle acutangle (points de la zone bleu clair) est transformé en un triangle acutangle. Si l'on répète cette transformation successi-

vement, la suite de points obtenue tend alors vers le point représentant le triangle équilatéral.

Chaque triangle vert (c'est-à-dire chaque point de la plage verte) est transformé en un triangle acutangle, chaque triangle bleu foncé est transformé en un triangle vert, et chaque triangle rouge est transformé en un triangle bleu foncé. Les triangles rouges sont ainsi acutangles après trois itérations et tendent peu à peu à être équilatéraux.

Les triangles de la courbe centrale en tirets-pointillés, issue du point $(30^\circ, 30^\circ)$, correspondent à la valeur $s = 5/4$ et se transforment tous en triangles dégénérés : ils sont donc précipités sur le point $(0, 0)$ et y restent à jamais lors des itérations ultérieures. Les points des trois courbes en tirets sont les triangles qui deviennent dégénérés après deux transformations, ceux des courbes en pointillés le deviennent après trois.

Les parties jaunes peuvent être découpées en considérant les triangles qui deviennent acutangles après quatre itérations, cinq, six, etc., et de même pour les triangles qui deviennent dégénérés après quatre transformations, cinq, six, etc. La carte se remplit alors avec des couleurs et des courbes supplémentaires. Mais au terme du processus, il restera quand même une infinité de points jaunes, correspondant à des triangles ne devenant ni acutangles ni dégénérés.

