

Comme nous l'avons vu, le triangle équilatéral est un point fixe. Il en est de même du triangle dégénéré : son triangle fils est également dégénéré.

Quatre points fixes de la transformation

En résolvant les équations couplées $s' = s$ et $p' = p$, on montre que la transformation a deux autres points fixes. Le premier de ces triangles a des angles d'environ 17,027, 32,132 et 130,84 degrés (ces angles ne sont vraisemblablement pas des fractions rationnelles de 180 degrés), correspondant à $s = (6 - \sqrt{5})/4$ et $p = (8\sqrt{5} - 17)/64$. Si l'on introduit ces valeurs de s et p dans les formules de van IJzeren, on obtient bien $s' = s$ et $p' = p$.

Le quatrième point fixe, déjà connu avant mes travaux, est le triangle heptagonal pour lequel $s = 7/4$ et $p = 7/64$; ses

angles sont égaux aux fractions $1/7$, $2/7$ et $4/7$ de 180 degrés, soit environ 25,7, 51,4 et 102,9 degrés. On l'obtient à partir d'un heptagone régulier (polygone ayant sept côtés) en prenant le premier, le deuxième et le quatrième sommets.

Il existe sept couples de triangles où chaque partenaire est, quant à la forme, le triangle de réflexion de l'autre : la suite des transformations itérées est alors de période 2 (la même forme de triangle apparaît toutes les deux transformations). Il existe 32 groupes de trois triangles dont la transformation parcourt les formes en boucle (toutes les trois transformations). Nous déterminerons plus loin explicitement l'un de ces 32 groupes. De la même façon, il existe des cycles qui durent quatre, cinq, ..., ou un nombre fini quelconque de réflexions.

À l'exception du point fixe équilatéral, qui attire tous les triangles proches de lui

lors de l'itération de la transformation, tous les autres points fixes et cycles sont répulsifs : les triangles dont la forme est très proche de la leur ont des fils d'aspect moins proche, et le seul moyen de rejoindre un tel point fixe ou cycle est d'en être un ancêtre.

Dans une infinité de cas, les réflexions successives d'un triangle initial ne tendent vers aucune forme stable ni vers aucun cycle de formes qui se répètent, mais errent à jamais dans le vaste univers des triangles obtusangles : leur devenir est chaotique.

Pour acquérir une vue d'ensemble du chaos des triangles de réflexion, on peut dresser une sorte de carte topographique où chaque triangle est représenté par un point dont les coordonnées sont ses deux plus petits angles α et β (voir l'encadré ci-dessous).

Sur cette carte, on peut déplacer chaque point représentatif d'un triangle vers le point représentatif de son triangle de réflexion.

LA CARTE DU MONDE DES TRIANGLES

La forme d'un triangle est entièrement déterminée par ses deux angles α et β les plus petits (le troisième angle est égal à $180^\circ - (\alpha + \beta)$).

On choisit $\alpha \geq \beta$. Chaque point (α, β) de la zone colorée du plan figurée ici correspond à un triangle, ou plus exactement à une forme de triangle. Le point $(0, 0)$ correspond à tous les triangles dégénérés en un segment (ceux dont les trois sommets sont alignés). Les deux angles aux extrémités du segment sont nuls ; le troisième vaut 180° et se situe quelque part sur le segment, mais sa position exacte est sans importance.

Le bord inférieur de la zone colorée ($\alpha > 0, \beta = 0$) correspond à des triangles dégénérés d'une autre espèce (dont on ne traite pas dans cet article), ceux dont deux des trois côtés sont parallèles et se rencontrent à l'infini avec l'angle $\beta = 0$. Le troisième côté est un segment ordinaire de longueur finie et forme l'angle intérieur α avec l'une des parallèles.

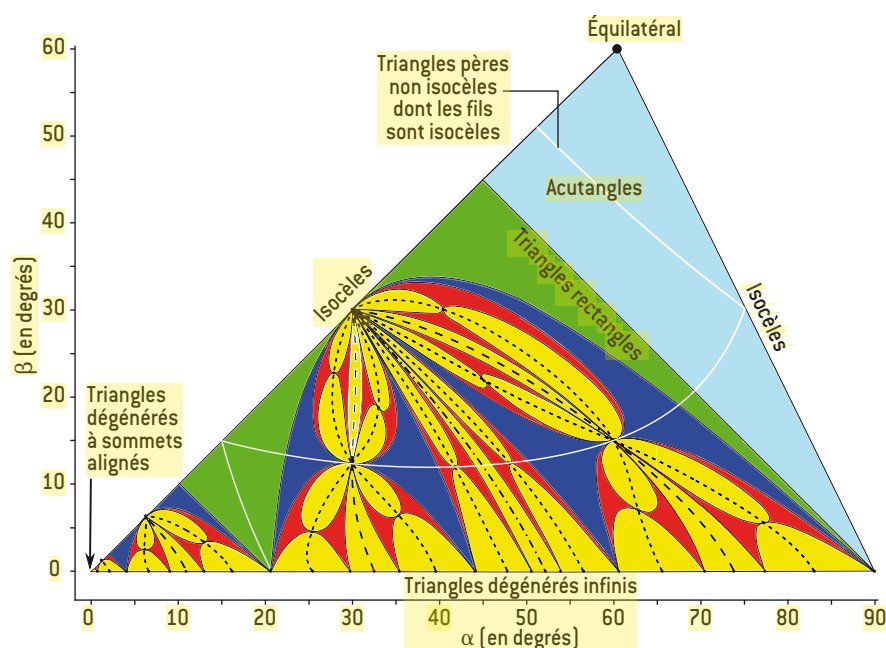
La construction du triangle de réflexion se traduit par une fonction qui envoie chaque point de la zone colorée (chaque triangle) sur le point correspondant à son triangle de réflexion. Tout triangle acutangle (points de la zone bleu clair) est transformé en un triangle acutangle. Si l'on répète cette transformation successi-

vement, la suite de points obtenue tend alors vers le point représentant le triangle équilatéral.

Chaque triangle vert (c'est-à-dire chaque point de la plage verte) est transformé en un triangle acutangle, chaque triangle bleu foncé est transformé en un triangle vert, et chaque triangle rouge est transformé en un triangle bleu foncé. Les triangles rouges sont ainsi acutangles après trois itérations et tendent peu à peu à être équilatéraux.

Les triangles de la courbe centrale en tirets-pointillés, issue du point $(30^\circ, 30^\circ)$, correspondent à la valeur $s = 5/4$ et se transforment tous en triangles dégénérés : ils sont donc précipités sur le point $(0, 0)$ et y restent à jamais lors des itérations ultérieures. Les points des trois courbes en tirets sont les triangles qui deviennent dégénérés après deux transformations, ceux des courbes en pointillés le deviennent après trois.

Les parties jaunes peuvent être découpées en considérant les triangles qui deviennent acutangles après quatre itérations, cinq, six, etc., et de même pour les triangles qui deviennent dégénérés après quatre transformations, cinq, six, etc. La carte se remplit alors avec des couleurs et des courbes supplémentaires. Mais au terme du processus, il restera quand même une infinité de points jaunes, correspondant à des triangles ne devenant ni acutangles ni dégénérés.



L'évolution d'un triangle qui passe de sa forme initiale à son triangle de réflexion, puis au triangle de réflexion de ce dernier et ainsi de suite, est alors visualisée par une suite de points issue de celui correspondant à la forme initiale. La vie d'un triangle est ainsi déterminée pour l'éternité par sa forme initiale: le système est déterministe. Mais il s'agit, du moins par endroits, d'un chaos déterministe.

Paradis, enfer et purgatoire pour triangles

Examinons plus en détail le devenir des triangles en fonction de leur forme initiale. Afin de mieux savourer les choses, rehaussons les couleurs du monde des triangles avec du vocabulaire céleste et décrétons que le paradis de ce monde est constitué par les triangles équilatéraux. Dans ce cas, les triangles acutangles sont nés sous une bonne étoile: ils restent acutangles toute leur vie et se rapprochent de plus en plus du paradis.

Un triangle qui n'a pas eu la chance de naître acutangle n'est pas forcément un cas désespéré. Qui habite la zone verte de la carte est envoyé en une seule itération dans la région bleu ciel, correspondant aux triangles acutangles, et va ainsi vers la vertu. Les triangles de la plage bleu foncé sont à peine plus éloignés de la béatitude, puisqu'ils se trouvent à un pas de la zone verte. Ceux de la zone rouge seront acutangles en trois étapes, en passant par la zone bleu foncé, puis par la région verte.

À la béatitude éternelle s'oppose l'enfer éternel. Tel est le sort des triangles dégénérés, qui demeurent à jamais à l'adresse $\alpha = \beta = 0$, dans le coin inférieur gauche de la carte. Cet état est un point fixe de la transformation, un cul-de-sac dont on ne s'échappe pas.

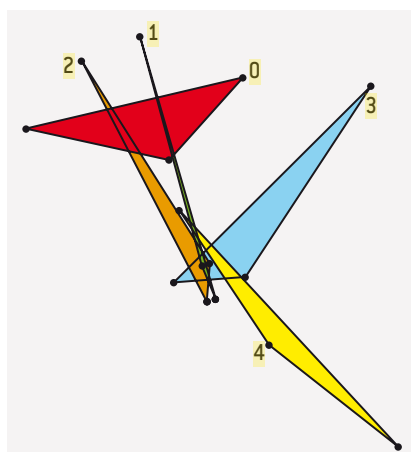
Les triangles qui tendent vers le paradis s'en approchent généralement avec retenue, et la plupart n'atteignent l'équilatéralité parfaite qu'au bout d'une infinité de réflexions. Il en va tout autrement des triangles damnés, lesquels sont précipités brutalement en enfer. Ces triangles correspondent sur la carte à certaines courbes. Ainsi, qui se fourvoie sur la courbe en tirets-pointillés du centre de la figure se retrouve en enfer au pas suivant. Un point d'une des courbes en tirets arrive en enfer en deux étapes, après avoir fait un crochet par les tirets-pointillés. Et les points situés sur les courbes en pointillés n'ont qu'une itération de plus à vivre.

L'AUTEUR

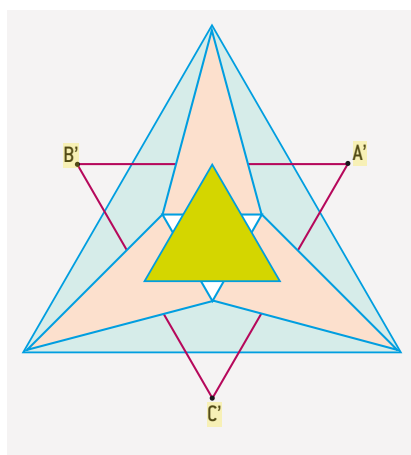


Grégoire NICOLLIER est professeur de mathématiques à la Haute école d'ingénierie

du Valais, à Sion en Suisse. Il est également guide de haute montagne.



4. QUE DEVIENDRA LE TRIANGLE ROUGE, numéroté 0, sous l'effet des transformations de réflexion successives ? Selon les valeurs précises de ses angles, il pourrait évoluer vers une forme équilatérale, se réduire soudain à un segment, changer de forme de façon cyclique ou de façon chaotique.



5. LE TRIANGLE ÉQUILATÉRAL A'B'C' peut résulter d'une transformation de réflexion appliquée à l'un de ses sept triangles pères: un triangle équilatéral (en vert), trois triangles isocèles identiques ayant pour angles 75, 75 et 30 degrés (en rose) et trois triangles isocèles identiques d'angles 15, 15 et 150 degrés (en bleu).

Dans un certain sens, le destin se laisse malgré tout amadouer. Un faux pas suffisamment bénin ne prive pas de paradis pour autant, tandis qu'un changement ciblé de comportement, aussi minuscule soit-il, permet d'échapper à l'enfer. Plus précisément: chaque point « bon », c'est-à-dire promis au paradis équilatéral, est entouré uniquement de points bons, tandis que tout autre point, en particulier s'il est « damné » (c'est-à-dire sur le chemin de la dégénérescence), est à distance aussi petite que l'on veut d'une infinité de points bons. Le chemin du paradis ne saurait être plus accueillant qu'ici: les bons peuvent s'abandonner à leur destin et il suffit à tous les autres, damnés ou non, de modifier un tant soit peu leur vie de façon ciblée – aussi peu qu'ils le désirent – pour connaître le même sort. Le mathématicien a la veine moins poétique: dans son jargon, l'ensemble des triangles qui convergent vers l'équilatéralité est « ouvert » et « dense ».

Qu'en est-il des triangles (des régions jaunes de la carte) qui, au début, ne sont situés ni sur une île de triangles bons ni sur un sentier de damnés? On peut poursuivre l'analyse et attribuer une nouvelle couleur à tous les points qui arrivent dans le rouge après une itération, puis une autre à tous ceux qui seront dans le rouge après deux itérations, et ainsi de suite. De la même façon, on trouve des courbes de points qui atterrissent sur une courbe en pointillés après une étape, ou deux, ou trois, etc.

Une structure fractale

Les nouvelles plages de couleur et les courbes ainsi ajoutées deviennent de plus en plus nombreuses et ressemblent aux portions de la carte déjà dessinées. On assiste à la naissance d'une structure fractale: si la carte était achevée (ce qui nécessiterait une infinité de couleurs), nous verrions que certaines parties contiennent des copies réduites et plus ou moins déformées d'elles-mêmes, copies qui contiennent par conséquent à leur tour des copies réduites d'elles-mêmes, etc. Remarquons en particulier que la minuscule plage jaune située à la pointe gauche de la carte se réduit à chaque ajout d'une nouvelle couleur.

Les nouvelles plages de couleur et les nouveaux sentiers de damnés remplissent la carte achevée à un tel degré que le jaune ne sera plus visible à l'œil nu. Une infinité de points jaunes subsistent pourtant au terme du processus. Ce sont des points,