

L'évolution d'un triangle qui passe de sa forme initiale à son triangle de réflexion, puis au triangle de réflexion de ce dernier et ainsi de suite, est alors visualisée par une suite de points issue de celui correspondant à la forme initiale. La vie d'un triangle est ainsi déterminée pour l'éternité par sa forme initiale: le système est déterministe. Mais il s'agit, du moins par endroits, d'un chaos déterministe.

Paradis, enfer et purgatoire pour triangles

Examinons plus en détail le devenir des triangles en fonction de leur forme initiale. Afin de mieux savourer les choses, rehaussons les couleurs du monde des triangles avec du vocabulaire céleste et décrétons que le paradis de ce monde est constitué par les triangles équilatéraux. Dans ce cas, les triangles acutangles sont nés sous une bonne étoile: ils restent acutangles toute leur vie et se rapprochent de plus en plus du paradis.

Un triangle qui n'a pas eu la chance de naître acutangle n'est pas forcément un cas désespéré. Qui habite la zone verte de la carte est envoyé en une seule itération dans la région bleu ciel, correspondant aux triangles acutangles, et va ainsi vers la vertu. Les triangles de la plage bleu foncé sont à peine plus éloignés de la béatitude, puisqu'ils se trouvent à un pas de la zone verte. Ceux de la zone rouge seront acutangles en trois étapes, en passant par la zone bleu foncé, puis par la région verte.

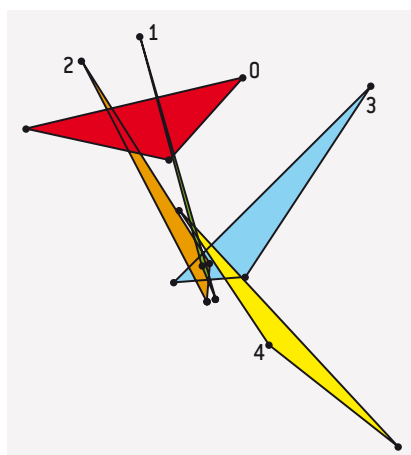
À la béatitude éternelle s'oppose l'enfer éternel. Tel est le sort des triangles dégénérés, qui demeurent à jamais à l'adresse $\alpha = \beta = 0$, dans le coin inférieur gauche de la carte. Cet état est un point fixe de la transformation, un cul-de-sac dont on ne s'échappe pas.

Les triangles qui tendent vers le paradis s'en approchent généralement avec retenue, et la plupart n'atteignent l'équilatéralité parfaite qu'au bout d'une infinité de réflexions. Il en va tout autrement des triangles damnés, lesquels sont précipités brutalement en enfer. Ces triangles correspondent sur la carte à certaines courbes. Ainsi, qui se fourvoie sur la courbe en tirets-pointillés du centre de la figure se retrouve en enfer au pas suivant. Un point d'une des courbes en tirets arrive en enfer en deux étapes, après avoir fait un crochet par les tirets-pointillés. Et les points situés sur les courbes en pointillés n'ont qu'une itération de plus à vivre.

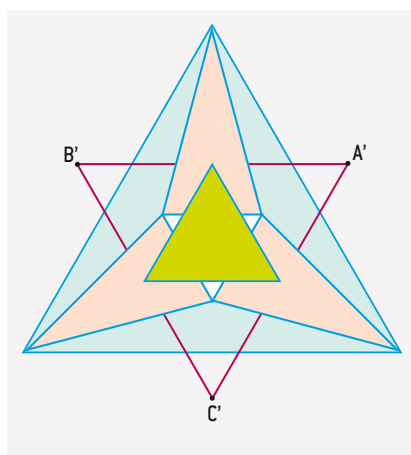
L'AUTEUR



Grégoire NICOLLIER est professeur de mathématiques à la Haute école d'ingénierie du Valais, à Sion en Suisse. Il est également guide de haute montagne.



4. QUE DEVIENDRA LE TRIANGLE ROUGE, numéroté 0, sous l'effet des transformations de réflexion successives ? Selon les valeurs précises de ses angles, il pourrait évoluer vers une forme équilatérale, se réduire soudain à un segment, changer de forme de façon cyclique ou de façon chaotique.



5. LE TRIANGLE ÉQUILATÉRAL A'B'C' peut résulter d'une transformation de réflexion appliquée à l'un de ses sept triangles pères: un triangle équilatéral (en vert), trois triangles isocèles identiques ayant pour angles 75, 75 et 30 degrés (en rose) et trois triangles isocèles identiques d'angles 15, 15 et 150 degrés (en bleu).

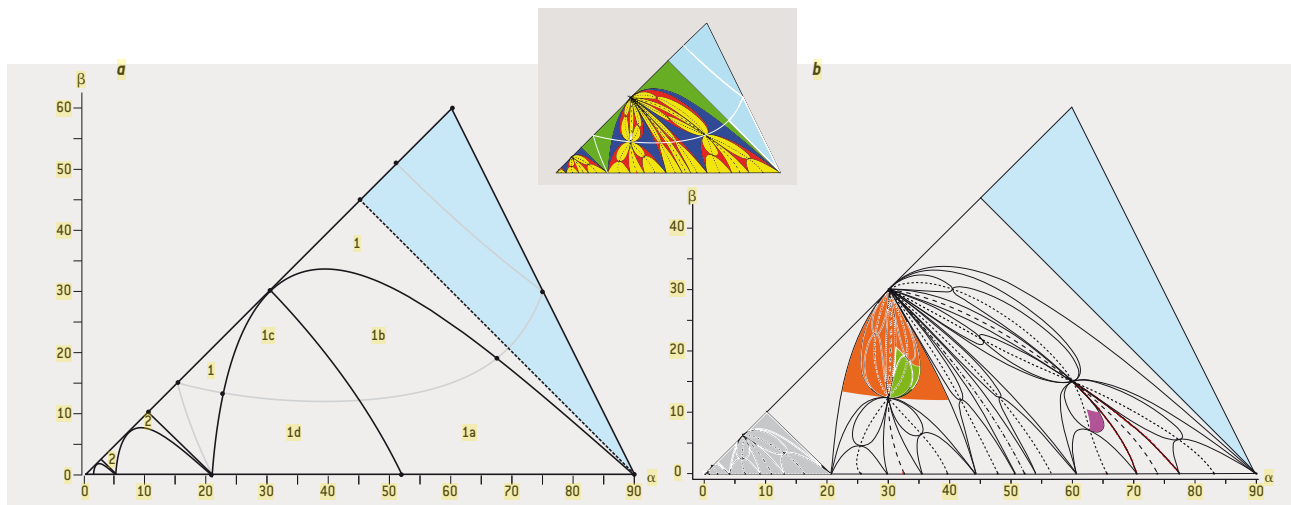
Dans un certain sens, le destin se laisse malgré tout amadouer. Un faux pas suffisamment bénin ne prive pas de paradis pour autant, tandis qu'un changement ciblé de comportement, aussi minuscule soit-il, permet d'échapper à l'enfer. Plus précisément: chaque point « bon », c'est-à-dire promis au paradis équilatéral, est entouré uniquement de points bons, tandis que tout autre point, en particulier s'il est « damné » (c'est-à-dire sur le chemin de la dégénérescence), est à distance aussi petite que l'on veut d'une infinité de points bons. Le chemin du paradis ne saurait être plus accueillant qu'ici: les bons peuvent s'abandonner à leur destin et il suffit à tous les autres, damnés ou non, de modifier un tant soit peu leur vie de façon ciblée – aussi peu qu'ils le désirent – pour connaître le même sort. Le mathématicien a la veine moins poétique: dans son jargon, l'ensemble des triangles qui convergent vers l'équilatéralité est « ouvert » et « dense ».

Qu'en est-il des triangles (des régions jaunes de la carte) qui, au début, ne sont situés ni sur une île de triangles bons ni sur un sentier de damnés ? On peut poursuivre l'analyse et attribuer une nouvelle couleur à tous les points qui arrivent dans le rouge après une itération, puis une autre à tous ceux qui seront dans le rouge après deux itérations, et ainsi de suite. De la même façon, on trouve des courbes de points qui atterrissent sur une courbe en pointillés après une étape, ou deux, ou trois, etc.

Une structure fractale

Les nouvelles plages de couleur et les courbes ainsi ajoutées deviennent de plus en plus nombreuses et ressemblent aux portions de la carte déjà dessinées. On assiste à la naissance d'une structure fractale: si la carte était achevée (ce qui nécessiterait une infinité de couleurs), nous verrions que certaines parties contiennent des copies réduites et plus ou moins déformées d'elles-mêmes, copies qui contiennent par conséquent à leur tour des copies réduites d'elles-mêmes, etc. Remarquons en particulier que la minuscule plage jaune située à la pointe gauche de la carte se réduit à chaque ajout d'une nouvelle couleur.

Les nouvelles plages de couleur et les nouveaux sentiers de damnés remplissent la carte achevée à un tel degré que le jaune ne sera plus visible à l'œil nu. Une infinité de points jaunes subsistent pourtant au terme du processus. Ce sont des points,



6. LES DIFFÉRENTES RÉGIONS DE LA CARTE des triangles peuvent être étiquetées par une adresse formée de chiffres et des lettres *a, b, c, d*, en exploitant la structure fractale de la carte. On associe le chiffre 1 à l'«arche» verte et ce qu'elle coiffe, le chiffre 2 à l'arche

bleue et ce qu'elle coiffe, etc. (a). Sous l'arche 1, on subdivise en 1a, 1b, 1c, 1d, et ainsi de suite. Par exemple, les régions indiquées en couleurs (b) se voient attribuer les adresses 1c1 [région orange, intérieur compris], 1c1a1 [région vert clair], 1a1c1a1 [région magenta].

tel le triangle heptagonal, qui ne sont ni bons ni damnés. Leur vie prend tôt ou tard un cours cyclique en parcourant en boucle une suite figée de points ; ou alors, leur vie papillonne sans cesse dans ce labyrinthe magnifique, évitant les bons et les damnés.

Appelons «mauvais» tous les points qui ne sont ni bons ni damnés et qui restent ainsi jaunes : ils demeurent à jamais au purgatoire. En étudiant attentivement ce microcosme de triangles régi par la transformation de réflexion, on peut prouver les propriétés suivantes.

Aussi près que l'on veut de chaque point mauvais ou damné se trouvent une infinité de points damnés, une infinité de points mauvais au futur périodique, et une infinité de points mauvais au futur errant (rappelons que deux points proches représentent deux triangles ayant presque les mêmes angles). On peut même trouver un triangle mauvais qui, au cours de sa vie, se rapproche une infinité de fois aussi près que l'on veut de n'importe quel point mauvais ou damné. Et le nombre de ces points «supermauvais» est infini !

Il s'avère possible et commode de décrire ce système dynamique en attribuant à chaque zone de la carte une adresse, formée de symboles (chiffres et lettres) et construite de façon systématique en s'appuyant sur la structure fractale, répétitive, de la carte. Dans cette dynamique symbolique, on attribue l'adresse 1 à la portion de la carte coiffée par l'arche vert foncé, cette arche comprise (voir la carte de l'encadré page 68 et la figure 6). En continuant vers la gauche et le bas de la carte

des triangles achevée, on attribuerait de même l'adresse 2 à la portion coiffée par l'arche bleu foncé, l'adresse 3 pour l'arche rouge et son intérieur, etc. Les zones Sud-Est, Nord-Est, Nord-Ouest et Sud-Ouest que l'on distingue sous l'arche verte de la carte reçoivent les adresses 1a, 1b, 1c et 1d respectivement. L'arche principale bleu foncé de 1c et son intérieur ovoïde ont l'adresse 1c1 (en orange sur la figure 6), l'arche principale du quart inférieur droit de cet œuf, avec son intérieur, est 1c1a1 (en vert clair sur la figure 6).

Une adresse pour chaque triangle

Ainsi, de façon systématique, en procédant par zooms successifs, on attribue des adresses de plus en plus longues à des portions coiffées par des arches de plus en plus petites ou étroites. La portion magenta de la figure 6 a par exemple l'adresse 1a1c1a1. Un point mauvais, qui reste jaune dans la carte achevée, est cerné par les arches de plus en plus petites ou étroites sous lesquelles il se trouve ; il acquiert ainsi une adresse de longueur infinie.

On constate notamment que le passage au triangle de réflexion envoie la zone magenta 1a1c1a1 sur toute la zone vert clair 1c1a1, la vert clair sur toute la zone orange 1c1 (vert clair compris) et l'orange sur toute la zone 1 (couleurs comprises). En fait, on démontre que chaque itération a pour effet de supprimer les deux premiers caractères des adresses débutant par 1 ; si on a supprimé *a*, on ne fait rien d'autre ;

BIBLIOGRAPHIE

G. Nicollier, *Convolution filters for polygons and the Petr-Douglas-Neumann theorem*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 2013 [<http://link.springer.com>, doi: 10.1007/s13366-013-0143-9].

G. Nicollier, *Convolution filters for triangles*, *Forum Geometricorum*, vol. 13, pp. 61-85, 2013 ; *Reflection triangles and their iterates*, *ibid.*, vol. 12, pp. 83-129, 2012 [<http://forumgeom.fau.edu>].

D. Ismailescu et J. Jacobs, *On sequences of nested triangles*, *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 53, pp. 169-184, 2006.

J. van IJzeren, *Drie hoeken met gegeven spiegelpunt*, *driehoek*, EUT Report 84-WSK-03, pp. 356-373, Université de technologie d'Eindhoven, 1984 [en ligne sur : alexandria.tue.nl/repository/books/256699.pdf].