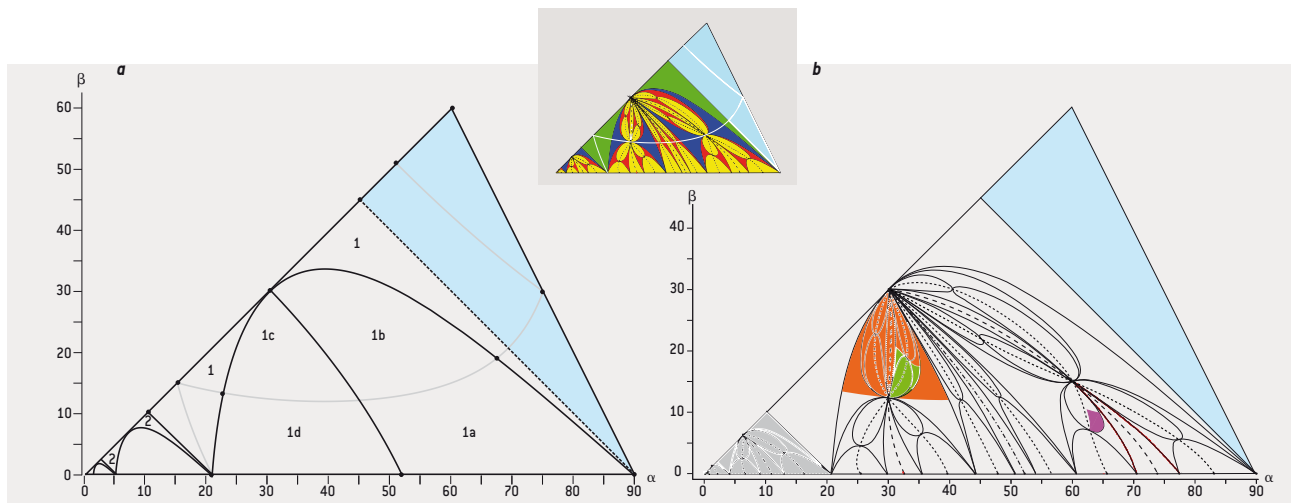




6. LES DIFFÉRENTES RÉGIONS DE LA CARTE des triangles peuvent être étiquetées par une adresse formée de chiffres et des lettres a , b , c , d , en exploitant la structure fractale de la carte. On associe le chiffre 1 à l'«arche» verte et ce qu'elle coiffe, le chiffre 2 à l'arche

bleue et ce qu'elle coiffe, etc. (a). Sous l'arche 1, on subdivise en 1a, 1b, 1c, 1d, et ainsi de suite. Par exemple, les régions indiquées en couleurs (b) se voient attribuer les adresses 1c1 [région orange, intérieur compris], 1c1a1 [région vert clair], 1a1c1a1 [région magenta].

tel le triangle heptagonal, qui ne sont ni bons ni damnés. Leur vie prend tôt ou tard un cours cyclique en parcourant en boucle une suite figée de points ; ou alors, leur vie papillonne sans cesse dans ce labyrinthe magnifique, évitant les bons et les damnés.

Appelons «mauvais» tous les points qui ne sont ni bons ni damnés et qui restent ainsi jaunes : ils demeurent à jamais au purgatoire. En étudiant attentivement ce microcosme de triangles régi par la transformation de réflexion, on peut prouver les propriétés suivantes.

Aussi près que l'on veut de chaque point mauvais ou damné se trouvent une infinité de points damnés, une infinité de points mauvais au futur périodique, et une infinité de points mauvais au futur errant (rappelons que deux points proches représentent deux triangles ayant presque les mêmes angles). On peut même trouver un triangle mauvais qui, au cours de sa vie, se rapproche une infinité de fois aussi près que l'on veut de n'importe quel point mauvais ou damné. Et le nombre de ces points «supermauvais» est infini !

Il s'avère possible et commode de décrire ce système dynamique en attribuant à chaque zone de la carte une adresse, formée de symboles (chiffres et lettres) et construite de façon systématique en s'appuyant sur la structure fractale, répétitive, de la carte. Dans cette dynamique symbolique, on attribue l'adresse 1 à la portion de la carte coiffée par l'arche vert foncé, cette arche comprise (voir la carte de l'encadré page 68 et la figure 6). En continuant vers la gauche et le bas de la carte

des triangles achevée, on attribuerait de même l'adresse 2 à la portion coiffée par l'arche bleu foncé, l'adresse 3 pour l'arche rouge et son intérieur, etc. Les zones Sud-Est, Nord-Est, Nord-Ouest et Sud-Ouest que l'on distingue sous l'arche verte de la carte reçoivent les adresses 1a, 1b, 1c et 1d respectivement. L'arche principale bleu foncé de 1c et son intérieur ovoïde ont l'adresse 1c1 (en orange sur la figure 6), l'arche principale du quart inférieur droit de cet œuf, avec son intérieur, est 1c1a1 (en vert clair sur la figure 6).

Une adresse pour chaque triangle

Ainsi, de façon systématique, en procédant par zooms successifs, on attribue des adresses de plus en plus longues à des portions coiffées par des arches de plus en plus petites ou étroites. La portion magenta de la figure 6 a par exemple l'adresse 1a1c1a1. Un point mauvais, qui reste jaune dans la carte achevée, est cerné par les arches de plus en plus petites ou étroites sous lesquelles il se trouve ; il acquiert ainsi une adresse de longueur infinie.

On constate notamment que le passage au triangle de réflexion envoie la zone magenta 1a1c1a1 sur toute la zone vert clair 1c1a1, la vert clair sur toute la zone orange 1c1 (vert clair compris) et l'orange sur toute la zone 1 (couleurs comprises). En fait, on démontre que chaque itération a pour effet de supprimer les deux premiers caractères des adresses débutant par 1 ; si on a supprimé a , on ne fait rien d'autre ;

BIBLIOGRAPHIE

G. Nicollier, *Convolution filters for polygons and the Petr-Douglas-Neumann theorem*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 2013 [<http://link.springer.com>, doi: 10.1007/s13366-013-0143-9].

G. Nicollier, *Convolution filters for triangles*, *Forum Geometricorum*, vol. 13, pp. 61-85, 2013 ; *Reflection triangles and their iterates*, *ibid.*, vol. 12, pp. 83-129, 2012 [<http://forumgeom.fau.edu>].

D. Ismailescu et J. Jacobs, *On sequences of nested triangles*, *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 53, pp. 169-184, 2006.

J. van IJzeren, *Driehoeken met gegeven spiegelpuntsdriehoek*, EUT Report 84-WSK-03, pp. 356-373, Université de technologie d'Eindhoven, 1984 [en ligne sur : alexandria.tue.nl/repository/books/256699.pdf].

si on a supprimé c , on échange a et c dans le reste de l'adresse.

On l'a vu, la zone vert clair $1c1a1$ se transforme en la zone orange $1c1$ lorsqu'on passe de chaque point père à son fils. Or cette zone orange, image déformée de la zone vert clair, recouvre entièrement celle-ci. Un théorème de topologie bien connu (le « théorème du point fixe de Brouwer ») implique alors que la transformation a un point fixe situé dans la zone vert clair. L'adresse infinie de ce point fixe (et jaune) ne peut être que le mot périodique $1c1a1c1a...$: c'est en effet la seule façon de retrouver l'adresse de départ après avoir supprimé les deux premiers caractères et interverti a et c dans le reste du mot. Ce triangle dont les angles sont les mêmes que ceux de son triangle de réflexion, nous le connaissons déjà : ses angles valent environ 17,027, 32,132 et 130,84 degrés. De la même façon, on trouve que le triangle heptagonal correspond au point fixe dont l'adresse est le mot périodique infini $1b1a1b1a...$

On peut raisonner de façon analogue avec la zone magenta $1a1c1a1$. Il lui faut

trois itérations pour recouvrir la zone 1 : la triple itération a donc un point fixe dans la zone magenta et ce point ne peut être situé qu'à l'adresse périodique $1a1c1a1a1c1a...$, où $1a1c1a$ se répète indéfiniment. En cherchant numériquement dans la zone magenta, on trouve que le triangle correspondant a pour angles 63,35, 7,17 et 109,48 degrés environ. Les formes de ce triangle, de son triangle de réflexion et du triangle de réflexion de ce dernier constituent ainsi un cycle de période fondamentale 3. De la même façon, j'ai déterminé les 31 autres cycles de période 3 en repérant toutes les adresses correspondant à des points fixes de la triple itération.

D'un système dynamique à un autre

Une telle analyse peut être poursuivie afin de caractériser de façon complète la dynamique des triangles sous l'effet de l'itération des réflexions. Tout n'est pas fini pour autant : comme toujours, la résolution d'une question en fait surgir de nouvelles.

On pourrait choisir, comme sommets du triangle fils, les points sur les côtés du triangle père qui sont à mi-chemin du milieu du côté et du pied de la hauteur. Le triangle ainsi construit a les mêmes angles que le triangle de réflexion. On a donc fondamentalement le même système dynamique. Mais les triangles ont tendance à être plus petits que les triangles de réflexion : si le père est acutangle, le fils, plus proche de l'équilatéralité, est même complètement inclus dans le père. Si l'on part d'un triangle bon, la suite des fils successifs se resserre ainsi maintenant sur un point limite. Où est situé ce point limite ? Et existe-t-il aussi lorsque le triangle est damné ou mauvais ?

Une autre question surgit lorsqu'on transpose notre problème en trois dimensions : quel est le comportement de la suite des pyramides de réflexion engendrée par une pyramide initiale à base triangulaire, où les nouveaux sommets sont les symétriques des anciens par rapport à la face opposée ? Les triangles de réflexion sont un joli exemple de système dynamique intéressant, et bien d'autres univers voisins restent à explorer. ■



Vendredi 18 octobre 2013
de 9 heures à 17 heures
Institut Pasteur - Paris 15^e

Inscrivez-vous sur le site

www.communication-publique.fr/inscription-18-octobre-2013

La quatrième édition des colloques « Communiquer la science » sera consacrée au débat dans son acception la plus large : de l'échange entre scientifiques et citoyens, lors d'une fête de la science ou d'un café des sciences, au débat public plus formalisé. L'objectif de cette rencontre : susciter une réflexion permettant aux organismes de recherche de mieux dialoguer avec les publics et aux citoyens d'appréhender les enjeux des recherches pour devenir acteurs du débat.

Pour en savoir plus :
www.communication-publique.fr

Les différentes formes d'échanges seront analysées pour les rendre plus performantes tant pour les chercheurs que pour les citoyens et pour préciser le rôle des institutions de recherche dans le cadre de démarches participatives. Le colloque s'adresse aux institutions de recherche, aux associations, aux élus, aux médias, aux citoyens qui pourront, aussi, participer via Twitter : #ConnectScience

Partage et mise en commun des pratiques, discussion sur les différentes formes de débats et leur finalité... Tels sont les enjeux de cette rencontre.

Entrée libre sous réserve d'inscription préalable et dans la limite des places disponibles

**Communication
PUBLIQUE**

* Placé sous l'égide de Communication publique, association de responsables de communication des institutions publiques, ce colloque est organisé à l'initiative d'organismes de recherche : Andra, BRGM, CEA, CNRS, Genopole*, Ineris, Inserm, Institut Pasteur, IRD, Irstea, de l'IHES, du MESR, d'Universcience et avec le concours de la CASDEN et la participation de Pour La Science.