

L'idée de L. Sallows est de remplacer les nombres par des formes géométriques toutes différentes et de considérer que la somme des figures géométriques est ce qu'on obtient quand elles s'ajustent parfaitement les unes aux autres pour donner un modèle M, qui joue le rôle de la constante S des carrés magiques.

Des sommes de figures géométriques

Un carré géomagique d'ordre n est donc un tableau de n^2 formes planes toutes différentes, tel que chaque série de formes prises dans une même ligne, une même colonne ou une des deux diagonales s'assemble sans recouvrement pour produire un modèle M fixé à l'avance. L'existence de tels carrés géométriques magiques n'est pas difficile à prouver, car il existe une traduction géométrique immédiate de tout carré magique en carré géomagique (voir la figure 1b).

Dans cette traduction, chaque entier du carré magique est remplacé par un segment (ou un rectangle ou un secteur de disque) de longueur e . Ainsi, en juxtaposant les éléments d'une même ligne, ou d'une même colonne, ou d'une même diagonale, on obtient toujours le même modèle M.

Cet exemple montre que la notion de carré géomagique généralise celle de carré magique. Le résultat n'est ici guère spectaculaire, mais heureusement, il existe d'autres carrés géomagiques ne provenant pas d'une telle traduction directe.

Ainsi, dans l'exemple de la figure 3, les trois pièces de la première ligne s'assemblent parfaitement en une forme carrée. C'est vrai aussi pour la deuxième ligne et la troisième, ainsi que pour les trois colonnes et les deux diagonales. Les neuf pièces, aux formes soigneusement sélectionnées, s'assemblent par trois de huit façons différentes, composant à chaque fois le même carré M.

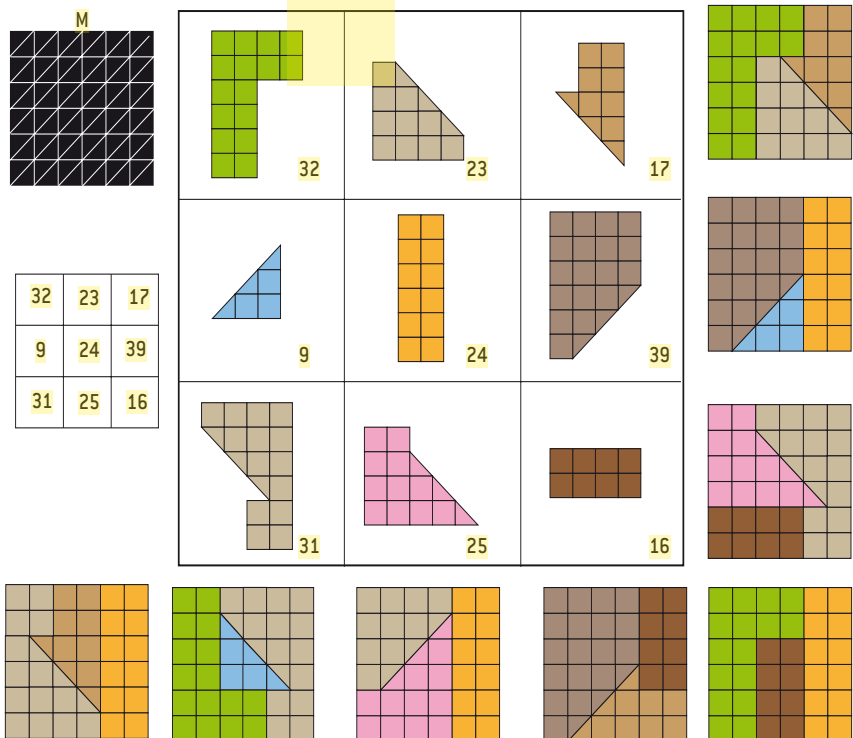
Le modèle M reconstitué huit fois est ici un carré, mais ce n'est pas une obligation : toute forme, pourvu qu'elle puisse s'obtenir pour chaque ligne, colonne et diagonale, peut être choisie comme modèle.

L'intérêt particulier des carrés magiques et plus généralement des curiosités arithmétiques provient de leur mystérieux charme. Comme à propos du monde vivant, on croit deviner en eux la marque d'une intelligence cachée qui les auraient conçues délibérément.

Paul Carus, 1917

Dans ce premier exemple, en considérant l'aire de chacune des neuf figures de base (mesurée en nombre de demi-carrés), on obtient un carré magique (non normal) de somme $S = 72$, soit l'aire de M mesurée en demi-carrés.

Il est clair que les aires des pièces d'un carré géomagique constitueront un carré magique à chaque fois que les pièces de base auront des aires différentes pouvant s'exprimer avec des nombres entiers. En effet, le modèle M, que chaque ligne, colonne ou diagonale reconstitue, possède une aire S, qui correspond à la somme des aires des pièces qui s'assemblent pour le produire ; par conséquent, si les aires des pièces de base sont toutes différentes et entières, elles vérifient les conditions imposées par la définition d'un carré magique. Lorsque ce carré magique associé est normal, on dira que le carré géomagique lui-même est normal.



3. LES CARRÉS GÉOMAGIQUES reprennent avec les formes les règles des carrés magiques constitués de nombres. En plus de la contrainte que les huit sommes des aires des trois formes (mesurées ici en demi-carrés) soient égales selon les lignes, les colonnes et les deux diagonales principales, les formes obtenues par assemblages des trois formes des cases doivent être identiques. Dans cet exemple, les neuf formes sont différentes et correspondent à des aires différentes, mais cette dernière contrainte n'est pas indispensable.

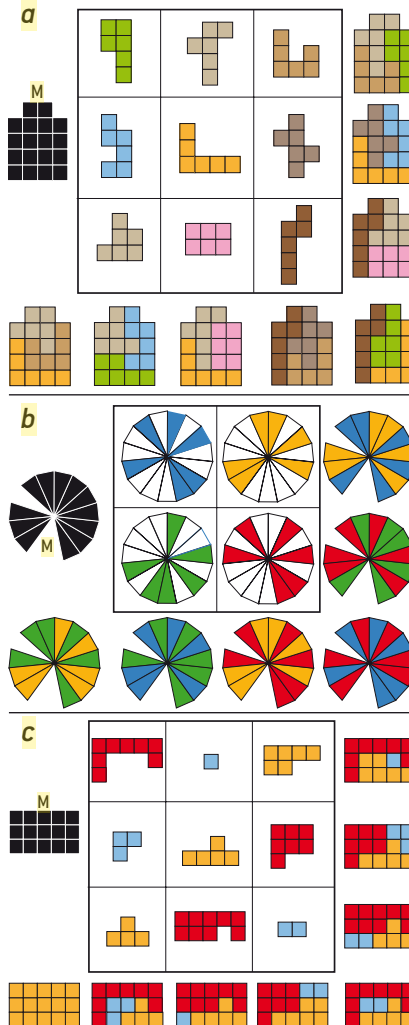
La condition que les aires des pièces de base soient différentes et entières n'est pas dans la définition d'un carré géomagique, qui exige seulement que les pièces de base soient différentes (pas leurs aires). Il est donc possible qu'un carré géomagique ne soit associé à aucun carré magique.

Un tel carré géomagique est représenté sur la figure 4a : les pièces de base sont toutes différentes et reconstituent de huit façons possibles le même modèle M (qui ici n'est pas carré). Cependant, toutes les pièces de base ont la même aire composée de six petits carrés (ce sont des hexamino) et les aires ne produisent donc aucun carré magique.

Notons que, parfois, un même ensemble de formes élémentaires donne non pas un modèle M selon toutes les lignes, colonnes et diagonales, mais en donne deux, M et M'. Il s'agit en quelque sorte de « doubles carrés géomagiques ». L'extraordinaire record en la matière est 12 : les neuf pièces de base du tableau donnent 12 modèles différents, chacun de huit façons différentes !

Il existe des carrés géomagiques d'ordre 2

La liberté donnée par l'emploi de pièces géométriques rend envisageable l'existence de carrés géomagiques d'ordre 2, alors qu'aucun carré magique d'ordre 2 n'est possible. Le problème occupa L. Sallows durant des années sans succès. Une solution de cette difficile énigme est l'œuvre d'un informaticien hollandais, Frank Tinkelenberg. Elle utilise



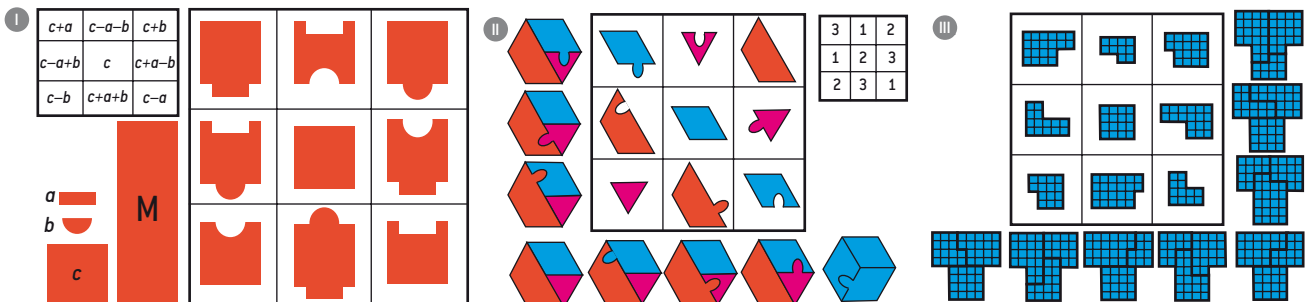
4. UN CARRÉ GÉOMAGIQUE formé d'hexamino (a) de même superficie (aucun carré magique ne lui correspond) ; le premier carré géomagique 2×2 (b) ; un carré géomagique formé de polymino (c).

à la fois des pièces de base composées de plusieurs morceaux, et le modèle M est en deux morceaux. Cette fois, les quatre figures de base se recomposent par symétrie et rotation de six façons différentes en un modèle M (voir la figure 4b). Les couleurs mettent en évidence l'imbrication des pièces de base et aident à la vérification du carré géomagique.

Bien sûr, cette solution n'est pas très satisfaisante à cause de l'éclatement de chaque pièce en sous-pièces, et la question se pose donc de savoir s'il existe un carré géomagique d'ordre 2 dont les pièces de base seraient toutes d'un seul tenant, ainsi que le modèle M produit par leurs six combinaisons. Personne n'a su encore répondre à cette élémentaire question, que nous soumettons donc aux lecteurs.

L. Sallows explique dans son livre qu'il s'est intéressé aux carrés magiques et à leurs variantes parce qu'il savait qu'il s'agissait d'un domaine où l'amateur, même sans formation mathématique poussée, peut travailler et y faire d'intéressantes découvertes. Son invention et le travail initial qu'il a réalisé sur ce sujet sorti de son imagination prouvent qu'il avait raison : un amateur décidé et persévérant est en mesure de découvrir une multitude de choses nouvelles dont l'ensemble constituera, comme c'est le cas ici, une petite discipline de recherche aussi intéressante que bien d'autres ayant un statut universitaire établi.

Deux types de méthodes sont mis en œuvre par L. Sallows pour découvrir de nouveaux carrés géomagiques : l'intel-



5. UNE MÉTHODE DE CONSTRUCTION des carrés géomagiques utilise la formule de Lucas. Édouard Lucas a prouvé que tous les carrés magiques d'ordre 3 étaient de la forme indiquée en (I), où a , b et c désignent des entiers non nuls. La même formule, en imaginant que a , b et c représentent des formes géométriques, permet de construire des carrés géomagiques (ici, la ligne du milieu et la colonne du milieu ne donnent pas M ; l'idée est néanmoins bonne et fournit des carrés géo-

magiques corrects). Une autre méthode de construction d'un carré géomagique est indiquée en (II) : 1) partir d'un carré magique incorrect (les mêmes nombres étant utilisés plusieurs fois) ; 2) remplacer les nombres par des formes (cela donne un carré géomagique incorrect puisque la même forme est utilisée plusieurs fois) ; 3) modifier les formes de manière à ce qu'elles deviennent toutes différentes. Le carré géomagique (III) a aussi été obtenu de cette façon.