

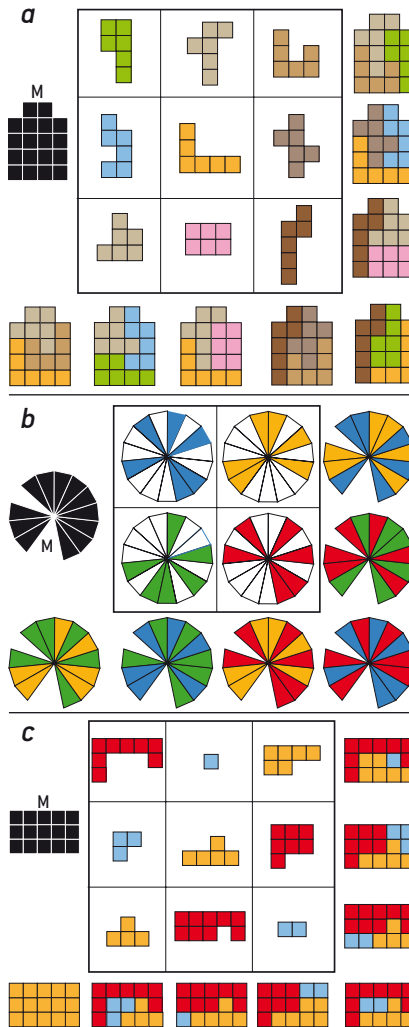
La condition que les aires des pièces de base soient différentes et entières n'est pas dans la définition d'un carré géomagique, qui exige seulement que les pièces de base soient différentes (pas leurs aires). Il est donc possible qu'un carré géomagique ne soit associé à aucun carré magique.

Un tel carré géomagique est représenté sur la figure 4a : les pièces de base sont toutes différentes et reconstituent de huit façons possibles le même modèle M (qui ici n'est pas carré). Cependant, toutes les pièces de base ont la même aire composée de six petits carrés (ce sont des hexamino) et les aires ne produisent donc aucun carré magique.

Notons que, parfois, un même ensemble de formes élémentaires donne non pas un modèle M selon toutes les lignes, colonnes et diagonales, mais en donne deux, M et M'. Il s'agit en quelque sorte de « doubles carrés géomagiques ». L'extraordinaire record en la matière est 12 : les neuf pièces de base du tableau donnent 12 modèles différents, chacun de huit façons différentes !

Il existe des carrés géomagiques d'ordre 2

La liberté donnée par l'emploi de pièces géométriques rend envisageable l'existence de carrés géomagiques d'ordre 2, alors qu'aucun carré magique d'ordre 2 n'est possible. Le problème occupa L. Sallows durant des années sans succès. Une solution de cette difficile énigme est l'œuvre d'un informaticien hollandais, Frank Tinkelenberg. Elle utilise



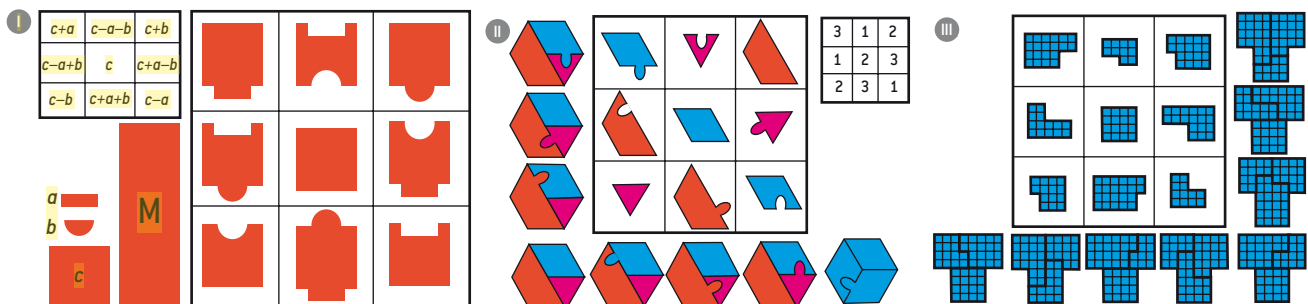
4. UN CARRÉ GÉOMAGIQUE formé d'hexamino (a) de même superficie (aucun carré magique ne lui correspond) ; le premier carré géomagique 2×2 (b) ; un carré géomagique formé de polymino (c).

à la fois des pièces de base composées de plusieurs morceaux, et le modèle M est en deux morceaux. Cette fois, les quatre figures de base se recomposent par symétrie et rotation de six façons différentes en un modèle M (voir la figure 4b). Les couleurs mettent en évidence l'imbrication des pièces de base et aident à la vérification du carré géomagique.

Bien sûr, cette solution n'est pas très satisfaisante à cause de l'éclatement de chaque pièce en sous-pièces, et la question se pose donc de savoir s'il existe un carré géomagique d'ordre 2 dont les pièces de base seraient toutes d'un seul tenant, ainsi que le modèle M produit par leurs six combinaisons. Personne n'a su encore répondre à cette élémentaire question, que nous soumettons donc aux lecteurs.

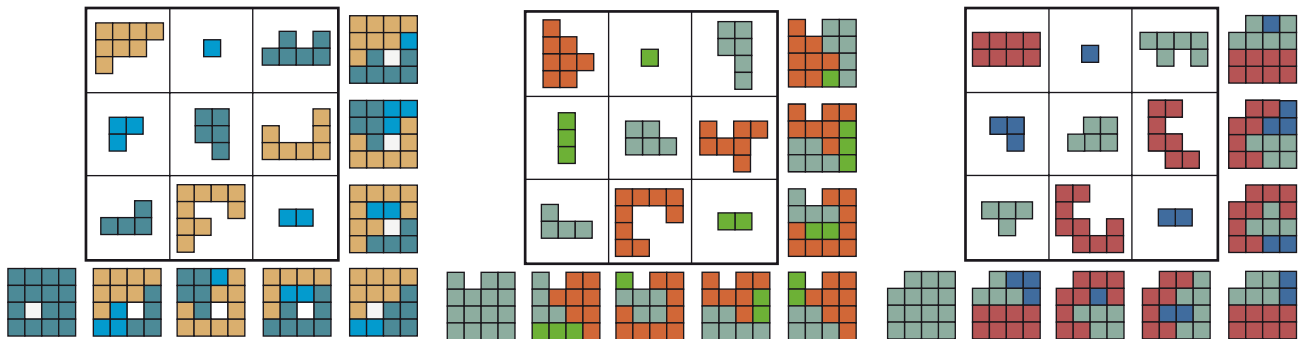
L. Sallows explique dans son livre qu'il s'est intéressé aux carrés magiques et à leurs variantes parce qu'il savait qu'il s'agissait d'un domaine où l'amateur, même sans formation mathématique poussée, peut travailler et y faire d'intéressantes découvertes. Son invention et le travail initial qu'il a réalisé sur ce sujet sorti de son imagination prouvent qu'il avait raison : un amateur décidé et persévérant est en mesure de découvrir une multitude de choses nouvelles dont l'ensemble constituera, comme c'est le cas ici, une petite discipline de recherche aussi intéressante que bien d'autres ayant un statut universitaire établi.

Deux types de méthodes sont mis en œuvre par L. Sallows pour découvrir de nouveaux carrés géomagiques : l'intel-



5. UNE MÉTHODE DE CONSTRUCTION des carrés géomagiques utilise la formule de Lucas. Édouard Lucas a prouvé que tous les carrés magiques d'ordre 3 étaient de la forme indiquée en (I), où a , b et c désignent des entiers non nuls. La même formule, en imaginant que a , b et c représentent des formes géométriques, permet de construire des carrés géomagiques (ici, la ligne du milieu et la colonne du milieu ne donnent pas M ; l'idée est néanmoins bonne et fournit des carrés géo-

magiques corrects). Une autre méthode de construction d'un carré géomagique est indiquée en (II) : 1) partir d'un carré magique incorrect (les mêmes nombres étant utilisés plusieurs fois) ; 2) remplacer les nombres par des formes (cela donne un carré géomagique incorrect puisque la même forme est utilisée plusieurs fois) ; 3) modifier les formes de manière à ce qu'elles deviennent toutes différentes. Le carré géomagique (III) a aussi été obtenu de cette façon.



6. TROIS EXEMPLES DE CARRÉS GÉOMAGIQUES NORMAUX dont le modèle est un carré 4×4 à un trou.

ligence et le calcul. Les travaux accomplis depuis des siècles pour construire et trouver systématiquement des carrés magiques suggèrent certaines méthodes pouvant s'appliquer aux carrés géomagiques. Deux d'entre elles sont expliquées à la figure 5. La première se fonde sur une propriété des carrés magiques d'ordre 3 démontrée par le mathématicien français Édouard Lucas (1842-1891), inventeur du casse-tête des tours de Brama (ou tours de Hanoi) et de divers tests de primalité encore utilisés aujourd'hui.

Comment trouver des carrés géomagiques ?

Bien sûr, dans les problèmes combinatoires, l'esprit déductif ne réussit pas toujours à rivaliser avec la machine. Celle-ci, explorant systématiquement des milliards de combinaisons, va, après parfois des jours entiers de calculs, produire des résultats qu'aucun cheminement de raisonnement ne semble en mesure de découvrir.

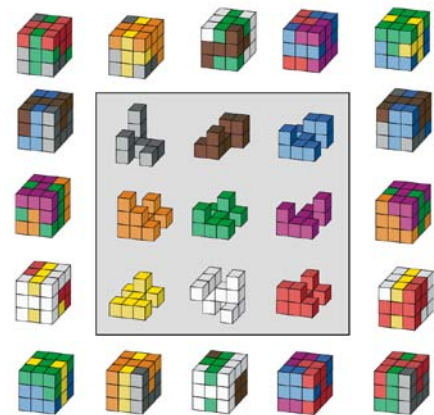
Ce qu'on trouve grâce à la machine est parfois étonnant. Alors qu'en opérant seul et sans ordinateur, vous ne construirez sans doute aucun carré géomagique normal d'ordre 3 dont le modèle M est le rectangle 3×5 et ayant des polyminos pour formes de base, l'ordinateur de L. Sallows, lui, en a découvert 1 411 (voir la figure 4c pour l'un d'entre eux).

En prenant pour M un carré 4×4 ayant un trou d'un carré 1×1 non situé sur le bord, et en se limitant toujours aux carrés géomagiques normaux dont les formes de base sont des polyminos, votre machine énumérera 4 370 solutions. Si, pour M, on découpe le trou carré 1×1

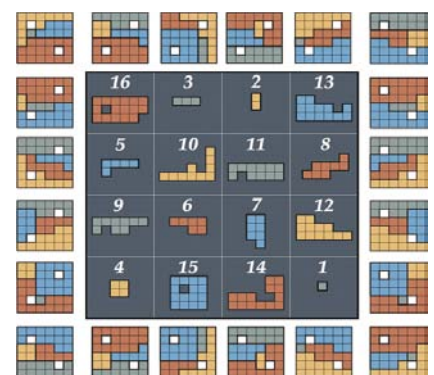
sur le bord et qu'on maintient toutes les autres conditions, le nombre de solutions devient 16 465. Toujours avec les mêmes conditions, mais en supprimant cette fois un carré 1×1 du coin, le nombre de solutions est encore plus grand : 27 110 (voir la figure 6 pour trois exemples de ces carrés magiques normaux).

Même s'ils sont parfois nombreux à satisfaire à un problème précis, les carrés géomagiques sont toujours rares parmi les figures candidates qu'un programme de recherche systématique va envisager et faire défiler lors de son exécution. Cela a pour conséquence que, pour en trouver un, on écrira en général un programme assez court (qui explicitera la brève définition des carrés géomagiques), mais qu'inévitablement le temps nécessaire de calcul avant d'obtenir une solution ou avant de les obtenir toutes sera long. À moins de progrès inattendus, les carrés géomagiques sont donc, le plus souvent, le résultat de longs calculs effectués par des programmes assez courts. Lorsqu'ils sont trouvés par le raisonnement, la situation n'est en fait pas très différente, car la capacité de raisonner provient elle aussi d'un processus d'évolution s'étendant sur une longue période, cette fois mesurable en milliards d'années.

Cette origine liée à de longs calculs est exactement ce qui caractérise ce que Charles Bennett dénomme des objets logiquement profonds (voir la rubrique du mois précédent). Cette remarque éclaire la citation de Paul Carus figurant page 81, car l'analogie entre les carrés magiques et les êtres vivants (qui eux aussi ont pour origine des sortes de longs calculs exécutés par des processus causaux relativement courts à décrire) est



7. EN TROIS DIMENSIONS. Ce carré géomagique peut être vu comme un casse-tête de rangement multiple. Avec seulement neuf pièces, il propose huit énigmes de rangements. Chaque ligne est un casse-tête, ainsi que chaque colonne et les deux diagonales. À chaque fois, il faut reconstituer un cube avec les trois pièces. De quoi s'amuser un moment...



8. EN HOMMAGE À DÜRER, Lee Sallows a composé ce carré géomagique en prenant comme base celui qui apparaît sur la fameuse gravure de 1514 et qui fixe les aires des formes élémentaires.