

intriqués à une température non nulle équivaut à l'étude d'un trou noir dans le cadre de la théorie des cordes. Le fait que des trous noirs soient impliqués montre à quel point ces dualités sont extraordinaires. Personne ne suggère que les phases quantiques de la matière contiennent véritablement des trous noirs ; le lien est plus subtil. Stephen Hawking, de l'Université de Cambridge, est connu pour avoir montré (entre autres choses) qu'à un trou noir est associée une certaine température. Celle-ci se traduit, dans la logique de la dualité, par le fait que le système correspondant de matière condensée est chaud, de sorte que l'onde de densité de spin ou le supraconducteur se transforme en un métal étrange.

Dialogue entre un trou noir et un superfluide

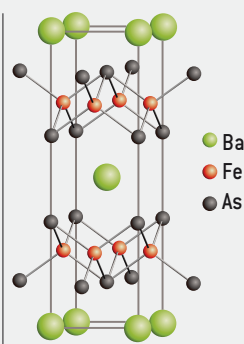
Ces méthodes ont permis de mieux expliquer les métaux étranges et d'autres états de la matière, mais elles ont été surtout utiles pour élucider la transition d'un superfluide à un isolant de Mott – type de matériau qui devrait être conducteur, mais dont les électrons sont bloqués dans des puits de potentiel qui les empêchent de conduire le courant. Un superfluide est analogue à un supraconducteur, si ce n'est qu'il est constitué d'atomes électriquement neutres et délocalisés dans le matériau. Et ce n'est pas la résistance électrique qui devient nulle, mais la viscosité du fluide. Ces dernières années, les expérimentateurs ont développé de nouvelles méthodes pour créer des superfluides artificiels. Ils mettent en place un réseau de lasers qui s'entrecroisent en formant une onde stationnaire périodique et versent dans ce dispositif de grandes quantités d'atomes extrêmement froids. Cela crée des puits de potentiel qui piègent plus ou moins les atomes. Si le potentiel est peu profond, les atomes se comportent comme un superfluide : ils se déplacent librement et sans résistance d'un site du réseau à un autre. Quand les chercheurs augmentent l'intensité du laser, donc la profondeur du potentiel périodique, les effets de corrélation sont augmentés et le superfluide se transforme brutalement en un isolant de Mott.

Au point de transition entre l'état superfluide et l'état isolant, les atomes circulent d'une façon très particulière. Par exemple, quand on supprime la pression externe qui fait se déplacer les atomes, ceux-ci s'immobilisent à une allure qui dépend de la température

Un exemple de métal étrange

À basse température, l'arséniure de baryum et de fer (BaFe_2As_2) change de propriétés en fonction de son dopage. Celui-ci consiste à remplacer une certaine fraction d'arsenic par du phosphore. Si le dopage est faible, le matériau forme un état qu'on nomme « onde de densité de spin ». Un électron du réseau cristallin se trouve entouré avec une plus grande probabilité d'électrons ayant un spin opposé. Dans cette phase, on observe une quasi-périodicité spatiale alternant des spins *haut* et *bas*.

Si la quantité de dopant augmente, la régularité de l'onde de densité de spin diminue. Elle disparaît pour la quantité critique de 30 pour cent d'arsenic



STRUCTURE de l'arséniure de baryum et de fer.

remplacé par du phosphore. Le spin de chaque électron a alors autant de chance d'être *haut* que *bas* sur chaque site du réseau cristallin. L'onde de densité de spin n'existe plus, mais le matériau devient supraconduc-

teur. Cependant, les physiciens pensent qu'il obéit à une théorie semblable à la théorie BCS, si ce n'est que la force attractive entre les paires d'électrons n'a pas pour origine les vibrations du réseau cristallin. Le mécanisme de formation des paires n'est pas encore compris.

La transition entre les phases est nommée point critique quantique. Si on maintient le dopage de 30 pour cent et que l'on augmente la température, une nouvelle phase apparaît, celle des métaux étranges dont la résistance électrique évolue différemment de celle des métaux ordinaires en fonction de la température. Un phénomène d'intrication massif entre ses électrons semble la décrire.

et de la constante de Planck, le paramètre fondamental de la théorie quantique, lequel n'intervient pas dans le comportement des autres phases. Nous avons expliqué ce comportement en imaginant que le fluide critique quantique était l'équivalent par dualité d'un trou noir dans la théorie des cordes.

La dualité a pourtant un inconvénient. Par nature, elle transforme ce qui est complexe en quelque chose de simple. Mais nous ne voulons pas toujours transformer le problème : nous voulons aussi comprendre la complexité en elle-même. La dualité est une boîte noire mathématique qui nous cache les détails des états intriqués ou la façon dont ces états apparaissent dans les matériaux réels. L'explication des mécanismes en jeu en est encore à ses débuts. Pour ceux d'entre nous qui ont l'habitude de réfléchir à la dynamique des électrons dans les cristaux, la théorie des cordes a apporté une nouvelle perspective à la dynamique des états quantiques complexes faisant intervenir l'intrication. Pour les théoriciens des cordes, l'intérêt que nous portions à leur approche a piqué leur curiosité pour les phases des matériaux quantiques, des phénomènes bien éloignés de la physique des commencements de l'Univers ou de ce qui se passe dans les accélérateurs de particules. L'étrange confluence de ces courants de pensée met en lumière d'une façon inattendue l'unité de la nature. ■

■ L'AUTEUR



Subir SACHDEV est professeur de physique à l'Université Harvard, aux États-Unis.

Il est l'auteur de l'ouvrage *Quantum Phase Transitions* [Cambridge University Press, 2011].

■ BIBLIOGRAPHIE

S. Sachdev, *What can gauge-gravity duality teach us about condensed matter physics ?*, *Annual Review of Condensed Matter Physics*, vol. 3, pp. 9-33, 2012.

C. V. Johnson et P. Steinberg, *What black holes teach about strongly coupled particles*, *Physics Today*, vol. 63(5), pp. 29-33, 2010.

I. R. Klebanov et J. M. Maldacena, *Solving quantum field theories via curved spacetimes*, *Physics Today*, vol. 62(1), pp. 28-33, 2009.

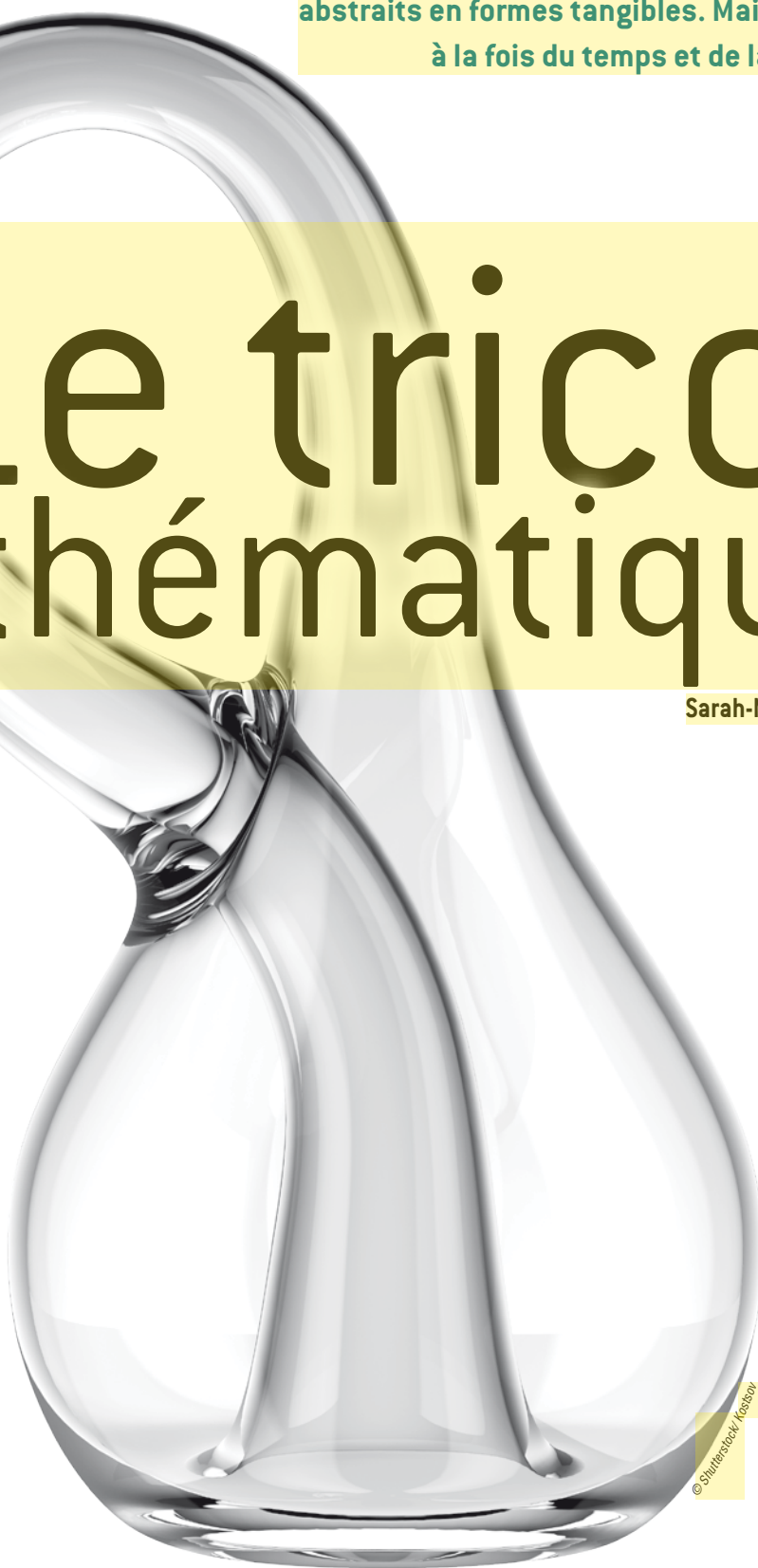
Le tricotage permet de traduire des surfaces et des objets mathématiques abstraits en formes tangibles. Mais cela exige à la fois du temps et de la créativité.

Le tricot mathématique

Sarah-Marie Belcastro

L'ESSENTIEL

- Les premiers tricots représentant des objets mathématiques datent d'il y a au moins un siècle.
- La représentation d'objets mathématiques par des tricots soulève des difficultés qui ne sont pas juste matérielles ou techniques, surtout si l'on cherche à être fidèle aux mathématiques.
- L'auteur a notamment tricoté des bandes de Möbius, des bouteilles de Klein, des nœuds ou des graphes intégrés à une surface torique.



© Shutterstock / Kasey

Je sais tricoter depuis l'école primaire, mais je ne me souviens pas vraiment quand j'ai commencé pour la première fois à tricoter des objets mathématiques. Au plus tard, ce devait être durant ma première année de troisième cycle à l'université. J'ai beaucoup tricoté cette année-là, car je manquais de sommeil et il me fallait rester éveillée pendant les cours. Durant la session d'automne, j'ai fait un pull-over pour mon père, en terminant les dernières coutures juste après mon dernier examen, et au printemps suivant, je terminais un pull-over pour ma mère. C'est également au cours de ce printemps que j'ai tricoté, pendant le cours de topologie, une bouteille de Klein, une surface mathématique n'ayant ni extérieur ni intérieur, et qui ne peut donc pas servir de récipient (voir la figure 1). J'ai achevé ce tricot pendant un exposé. Il était imparfait, mais j'étais si enthousiaste que, à la fin du cours, je l'ai lancé au professeur afin qu'il puisse y jeter un œil.

Au fil des ans, j'ai tricoté de nombreuses bouteilles de Klein ainsi que d'autres objets mathématiques, et j'ai sans cesse amélioré mes modèles. À l'époque où je me suis mise à tricoter des objets mathématiques, j'ignorais totalement si quelqu'un avait entrepris un tel travail auparavant. J'ai appris plus tard qu'il y a longtemps que des gens font du tricot mathématique.

Il y a un siècle déjà...

Les plus anciennes surfaces mathématiques tricotées connues ont été créées à la fin du XIX^e siècle ou au début du XX^e par Alexander Crum Brown, un professeur de chimie écossais (voir l'encadré page 50). En 1971, Miles Reid, de l'Université de Warwick en Grande-Bretagne, a publié un article sur le tricotage de diverses surfaces. Au milieu des années 1990, une technique permettant de tricoter des bandes de Möbius, issue de l'article de M. Reid, a été reproduite et répandue *via* Internet, qui en était alors à ses débuts (une bande de Möbius est un ruban dont on joint les deux extrémités après avoir fait tourner de 180 degrés l'une de ces dernières, de telle façon que la surface résultante n'ait



1. QUAND ON TENTE de la représenter en trois dimensions, la bouteille de Klein, objet mathématiquement défini à partir d'un rectangle plan et qui n'a ni intérieur ni extérieur, devient une surface qui se recoupe avec elle-même. Ci-dessus, une bouteille de Klein tricotée par l'auteur en 2013. Au lieu d'une auto-intersection fixe, l'objet tricoté a un trou ; on peut ainsi le manipuler pour montrer ses propriétés. Les bandes colorées différemment correspondent à des bandes de Möbius.

qu'un seul côté : on peut la parcourir en totalité sans lever le doigt).

Des tricoteurs non mathématiciens ont également créé des modèles pour bandes de Möbius ; l'un d'eux, conçu pour être porté en tant qu'écharpe, a été créé en 1989 par Elizabeth Zimmerman, une célèbre tricoteuse d'origine britannique.

J'ai pris connaissance du modèle de M. Reid, et il m'inspira une nouvelle conception de la bouteille de Klein. Le tricotage mathématique a depuis rencontré du succès, et de nombreux nouveaux modèles sont maintenant disponibles. Certains d'entre eux figurent dans les deux ouvrages que j'ai coédités avec Carolyn Yackel, enseignante de mathématiques à l'Université Mercer, aux États-Unis.

Des ouvrages utiles à l'enseignement

On pourrait se demander quel peut être l'intérêt de tricoter des objets mathématiques. L'un des bénéfices de cette activité est que les tricots, une fois achevés, constituent une très bonne aide pour l'enseignement des mathématiques. Un tricot est souple et peut être manipulé physiquement, contrairement aux infographies, souvent magnifiques et scientifiquement parfaites, mais impalpables. Et l'activité de tricotage elle-même est éclairante : en créant un objet, sans suivre le modèle de quelqu'un d'autre, on en retire une connaissance approfondie. Pour concrétiser une abstraction, il faut la comprendre suffisamment pour décider quelles propriétés mettre en valeur. De telles décisions constituent une partie cruciale du processus de conception.

Considérons d'abord le tricotage d'un point de vue géométrique. Les mailles du tricot forment un réseau de rectangles, chaque rectangle contenant une maille (voir la figure 2). On élabore la forme du tricot principalement à l'aide des « augmentations » et des « diminutions ». Comme leurs noms l'indiquent, les augmentations augmentent le nombre de mailles dans un rang (voir la figure 3), et les diminutions le diminuent. Ces deux processus permettent de créer une courbure dans le tricot. On peut remarquer que faire une diminution a le même effet qu'une