

sions, a été réalisée avec les aiguilles à tricoter parallèles aux flèches simples du rectangle, et les tours de tricotage formés dans la direction des flèches doubles (voir la figure 5). Elle avait beaucoup d'imperfections, mais à l'époque, je n'en avais relevé qu'une seule : cette bouteille en laine était figée dans une configuration tridimensionnelle unique, parce que je l'avais réalisée avec une auto-intersection. Pour régler ce problème, j'ai rapidement réalisé une bouteille de Klein, assez vilaine, dotée d'un trou (voir la figure 6).

Les défauts de mes premières bouteilles de Klein tricotées se rangeaient en deux catégories : esthétique et mathématique. D'abord l'esthétique : ces objets étaient affreux ! L'une des raisons était que j'utilisais du mauvais matériel. J'ai toujours préféré me servir d'aiguilles à tricoter circulaires, qui sont composées de deux extrémités pointues reliées par un câble fin et souple. À l'université, j'utilisais souvent des aiguilles dont je raccourcissais les câbles en plastique en les faisant fondre, ou je fabriquais mes propres aiguilles circulaires avec du fil métallique et du ruban d'emballage (qui accrochait sans arrêt le fil à tricoter).

Ces tentatives pour fabriquer des aiguilles à la fois suffisamment courtes et suffisamment flexibles pour mes besoins ont donné lieu à une expérience de tricotage plutôt frustrante et à des résultats pas très heureux. Par la suite, j'ai pu me procurer des aiguilles en bambou fixées à des câbles creux que l'on peut allonger ou raccourcir à volonté. Et j'ai appris comment utiliser tout l'attirail standard du tricotage pour obtenir les résultats que je désire.

Difficultés matérielles et mathématiques

Cependant, il n'y avait pas que les aiguilles : le fil à tricoter posait lui aussi problème. Ma première bouteille de Klein a été fabriquée avec un fil d'acrylique acceptable, mais de qualité médiocre. La deuxième a été fabriquée avec un fil d'origine inconnue, que j'avais trouvé dans une brocante. Il était difficile à travailler et son toucher « plastique-fibre de verre » m'horripilait. Aujourd'hui, j'ai tendance à utiliser du fil de haute qualité plutôt que le tout-venant, et je choisis la couleur, le type de teinture et la texture du fil en fonction de mes objectifs mathématiques. En fin de compte, dans la

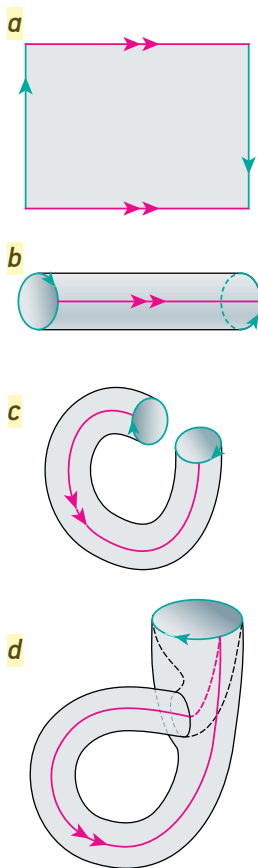
conception de ces objets, j'ai improvisé sans trop penser aux détails, de sorte que ma première bouteille de Klein est difforme et que la deuxième présente une ligne verticale bizarre (non visible sur la figure 6).

Venons-en maintenant aux problèmes mathématiques. L'approche que j'ai utilisée dans les deux cas consistait à tricoter quelque chose ressemblant à un cylindre, à faire passer l'une des extrémités de ce cylindre à travers son côté, puis à joindre les deux extrémités du cylindre. Pour passer à travers le cylindre, on peut intégrer une ouverture latérale (comme je l'ai fait avec ma deuxième bouteille de Klein), ou créer une auto-intersection en faisant passer des mailles à travers le côté du cylindre (comme je l'ai fait avec ma première bouteille de Klein).

De l'une ou l'autre manière, en utilisant cette méthode, on crée une bouteille de Klein à partir du rectangle aux côtés orientés et identifiés, les rangs de mailles étant parallèles à deux des côtés du rectangle



4. LES RANGS ET LES COLONNES de mailles guident l'œil le long de trajectoires qui équivalent à des lignes de latitude et de longitude, un système de coordonnées adapté à la courbure de la sphère.



5. UNE BOUTEILLE DE KLEIN est l'objet mathématique obtenu à partir d'un rectangle aux côtés orientés [a, flèches], que l'on identifie (ou que l'on joint) deux à deux. Un modèle tridimensionnel de la bouteille de Klein s'obtient en courbant et en étirant le rectangle dans la troisième dimension, de façon à coller les côtés qui se correspondent [b, c]. Mais la surface formée doit alors se traverser [d]. L'ouvrage ci-dessus est la première bouteille de Klein tricotée par l'auteur [cette surface comporte ici une auto-intersection tricotée].



6. LA DEUXIÈME BOUTEILLE DE KLEIN tricotée par l'auteur. Elle comporte une ouverture et non une auto-intersection tricotée, de sorte que la surface coulisse au sein d'elle-même. Bien que ce modèle ait constitué une amélioration par rapport au premier, les coordonnées suggérées par les rangs et les colonnes de mailles ne correspondent toujours pas au système de coordonnées associé au rectangle permettant de définir mathématiquement la bouteille de Klein.



7. CETTE BOUTEILLE DE KLEIN d'une dizaine de centimètres a été réalisée en utilisant la méthode de tricotage d'une bande de Möbius proposée par Miles Reid. Une torsion d'un demi-tour est d'emblée intégrée au tricot, de sorte que l'identification souhaitée des côtés du rectangle de définition de la bouteille de Klein se produit automatiquement, avec des coordonnées qui correspondent à celles suggérées par les rangs et les colonnes de mailles.

(les flèches simples dans la figure 5) et les colonnes de mailles étant parallèles aux deux autres côtés du rectangle (les flèches doubles dans la figure 5).

Il est très facile de joindre les extrémités du cylindre de façon incorrecte. À moins que le tricoteur ou la tricoteuse n'introduise une torsion d'un demi-tour avant de réunir les deux extrémités, les quatre coins du rectangle ne se rejoindront pas. Sans cette torsion, le résultat est encore une bouteille de Klein, mais les coordonnées suggérées par les rangs et les colonnes de mailles ne correspondent pas aux coordonnées du rectangle sous-jacent, et la géométrie de l'objet achevé n'est pas celle souhaitée. Un cylindre tricoté, cependant, oppose de la résistance à la torsion, d'où la difficulté que présente cette étape.

Donner au tricot une torsion intrinsèque

J'ai fini par trouver une solution à ce problème : créer le demi-tour de torsion intrinsèquement au lieu de l'ajouter à la fin. J'ai effectué cela en partant de la construction de la bande de Möbius indiquée par M. Reid. Dans cette méthode, les aiguilles sont parallèles aux flèches doubles du rectangle de base, et le tricotage se déroule en suivant simultanément les deux côtés à flèches simples du rectangle. Comme le demi-tour de torsion est ainsi d'emblée présent dans le tricot, la jointure souhaitée du rectangle sous-jacent se produit automatiquement,

L'AUTEUR



Sarah-Marie BELCASTRO est mathématicienne au *Smith College*, à Northampton (Massachusetts, États-Unis), et membre invitée du *Sarah Lawrence College*, (État de New York).

Article publié avec l'aimable autorisation de *American Scientist*.



8. CETTE BANDE DE MÖBIUS intègre un motif représentant le graphe complet K_6 (six sommets tous connectés deux à deux par une arête). Le fil étant grossier, les arêtes ne se distinguent pas bien, les mailles adjacentes entretenant les couleurs.

avec des coordonnées (abscisses et ordonnées) qui correspondent bien aux rangs et aux colonnes de mailles (voir la figure 7). Des instructions sommaires pour tricoter une bouteille de Klein sont disponibles sur mon site Web de tricotage mathématique.

Cette solution était le fruit de plusieurs années de réflexion. Après m'être rendu compte à quel point mes premières bouteilles de Klein étaient défectueuses, je souhaitais faire mieux et créer un modèle qui fût plus fidèle aux mathématiques. Et c'est ainsi que la question s'est posée : que signifie être mathématiquement fidèle pour un objet tricoté ?

Être fidèle aux mathématiques

La façon dont un objet est construit, dans tout art ou technique, met en lumière certaines des propriétés de cet objet et en masque d'autres. La modélisation d'objets mathématiques ne fait pas exception à cette règle : elle nécessite que nous fassions des choix sur les aspects mathématiques de cet objet qui nous semblent les plus importants. Chaque fois que possible, je tricote des objets de telle façon qu'un ensemble particulier de propriétés soit intrinsèque à la construction.

La plupart des objets que je confectionne présentent à la fois des aspects topologiques et des aspects géométriques. Autrement dit, ces objets ont une forme globale qui est conservée lorsqu'on les courbe ou qu'on les étire, et ils ont une configuration et