



6. LA DEUXIÈME BOUTEILLE DE KLEIN tricotée par l'auteur. Elle comporte une ouverture et non une auto-intersection tricotée, de sorte que la surface coulisse au sein d'elle-même. Bien que ce modèle ait constitué une amélioration par rapport au premier, les coordonnées suggérées par les rangs et les colonnes de mailles ne correspondent toujours pas au système de coordonnées associé au rectangle permettant de définir mathématiquement la bouteille de Klein.



7. CETTE BOUTEILLE DE KLEIN d'une dizaine de centimètres a été réalisée en utilisant la méthode de tricotage d'une bande de Möbius proposée par Miles Reid. Une torsion d'un demi-tour est d'emblée intégrée au tricot, de sorte que l'identification souhaitée des côtés du rectangle de définition de la bouteille de Klein se produit automatiquement, avec des coordonnées qui correspondent à celles suggérées par les rangs et les colonnes de mailles.

(les flèches simples dans la figure 5) et les colonnes de mailles étant parallèles aux deux autres côtés du rectangle (les flèches doubles dans la figure 5).

Il est très facile de joindre les extrémités du cylindre de façon incorrecte. À moins que le tricoteur ou la tricoteuse n'introduise une torsion d'un demi-tour avant de réunir les deux extrémités, les quatre coins du rectangle ne se rejoindront pas. Sans cette torsion, le résultat est encore une bouteille de Klein, mais les coordonnées suggérées par les rangs et les colonnes de mailles ne correspondent pas aux coordonnées du rectangle sous-jacent, et la géométrie de l'objet achevé n'est pas celle souhaitée. Un cylindre tricoté, cependant, oppose de la résistance à la torsion, d'où la difficulté que présente cette étape.

Donner au tricot une torsion intrinsèque

J'ai fini par trouver une solution à ce problème : créer le demi-tour de torsion intrinsèquement au lieu de l'ajouter à la fin. J'ai effectué cela en partant de la construction de la bande de Möbius indiquée par M. Reid. Dans cette méthode, les aiguilles sont parallèles aux flèches doubles du rectangle de base, et le tricotage se déroule en suivant simultanément les deux côtés à flèches simples du rectangle. Comme le demi-tour de torsion est ainsi d'emblée présent dans le tricot, la jointure souhaitée du rectangle sous-jacent se produit automatiquement,

L'AUTEUR



Sarah-Marie BELCASTRO est mathématicienne au *Smith College*, à Northampton (Massachusetts, États-Unis), et membre invitée du *Sarah Lawrence College*, (État de New York).

Article publié avec l'aimable autorisation de *American Scientist*.



8. CETTE BANDE DE MÖBIUS intègre un motif représentant le graphe complet K_6 (six sommets tous connectés deux à deux par une arête). Le fil étant grossier, les arêtes ne se distinguent pas bien, les mailles adjacentes entretenant les couleurs.

avec des coordonnées (abscisses et ordonnées) qui correspondent bien aux rangs et aux colonnes de mailles (voir la figure 7). Des instructions sommaires pour tricoter une bouteille de Klein sont disponibles sur mon site Web de tricotage mathématique.

Cette solution était le fruit de plusieurs années de réflexion. Après m'être rendu compte à quel point mes premières bouteilles de Klein étaient défectueuses, je souhaitais faire mieux et créer un modèle qui fût plus fidèle aux mathématiques. Et c'est ainsi que la question s'est posée : que signifie être mathématiquement fidèle pour un objet tricoté ?

Être fidèle aux mathématiques

La façon dont un objet est construit, dans tout art ou technique, met en lumière certaines des propriétés de cet objet et en masque d'autres. La modélisation d'objets mathématiques ne fait pas exception à cette règle : elle nécessite que nous fassions des choix sur les aspects mathématiques de cet objet qui nous semblent les plus importants. Chaque fois que possible, je tricote des objets de telle façon qu'un ensemble particulier de propriétés soit intrinsèque à la construction.

La plupart des objets que je confectionne présentent à la fois des aspects topologiques et des aspects géométriques. Autrement dit, ces objets ont une forme globale qui est conservée lorsqu'on les courbe ou qu'on les étire, et ils ont une configuration et

une structure particulière dans l'espace. Parfois, la topologie prend le pas sur la géométrie, parfois c'est l'inverse ; cette différence détermine si l'objet doit être muni d'une courbure, et si oui, où.

Je tricote souvent des surfaces. Elles sont bidimensionnelles et généralement lisses, ce qui signifie que les modèles tricotés ne doivent pas comporter de coutures, visibles ou non. Un modèle idéal d'une surface ne devrait pas comporter de mailles d'arrêt pour les bords. Dans le monde réel, le fil doit avoir deux extrémités. De même, une pièce tricotée peut être fabriquée à partir de plus d'une pièce de fil à tricoter, mais la transition d'une pelote à une autre devrait être invisible. Ces caractéristiques font partie d'un modèle topologique pour le tricotage que j'ai décrit en 2009.

Textures et motifs

Un autre aspect à considérer quand on tricote des objets mathématiques est la texture de leur surface. Par exemple, l'intérieur et l'extérieur d'une bouteille de Klein abstraite se confondent, et donc la texture d'une bouteille de Klein tricotée devrait être la même sur ses deux côtés (ou faces) physiques. Il devrait être impossible de dire quelle face réelle on est en train d'observer ou toucher, et aucune transition ne devrait être perceptible entre les différentes parties de la pièce tricotée. Pour certains autres objets, les deux faces sont mathématiquement distinctes, et leurs textures devraient par conséquent être distinguables.

On peut aussi mettre en exergue certains sous-objets ou propriétés mathématiques au moyen d'un motif intégré au tricot. Par exemple, on peut se servir de motifs à rayures pour faire apparaître des bandes de Möbius au sein d'une bouteille de Klein.

La plupart de ces modèles à motifs posent des difficultés mathématiques en raison du problème de la discrétisation : une courbe régulière ou une aire colorée dessinées sur un morceau de papier ou électroniquement doivent, dans le tricot, être traduites en une séquence de mailles discrètes. Cela nous ramène à la question du maillage (voir les figures 3 et 4). Les informaticiens qui travaillent sur la visualisation d'objets en trois dimensions ont mis au point des algorithmes pour imposer un maillage sur un objet idéalisé. Un maillage plus fin donne un aspect plus lisse ; de fait, c'est grâce à l'utilisation de maillages très

fins que l'on obtient des infographies très réalistes. Dans le tricotage, l'obtention d'un maillage plus fin nécessite à la fois un fil plus fin et beaucoup plus de temps.

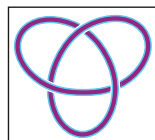
La discrétisation d'un motif n'est pas aussi simple que la surimposition d'un maillage. En effet, les mailles d'un tricot ne sont pas tout à fait carrées en proportion ; leur « rapport d'aspect », c'est-à-dire le rapport largeur/hauteur, est proche de 5:6. Ce fait doit être pris en considération avant de passer à l'exécution du tricot ; sinon, l'objet obtenu sera incorrectement allongé. En général, je réalise un échantillon de tricot avec le fil que j'ai l'intention d'utiliser, ce qui me permet de voir quel sera le rap-

port d'aspect de la maille, puis je crée un papier quadrillé constitué de rectangles élémentaires ayant les proportions appropriées. Il faut ensuite déterminer la forme globale – là où il y aura des augmentations et des diminutions, des rangs raccourcis et d'autres éléments de construction – et traduire cela sur le papier quadrillé. Le défi consiste alors à placer avec précision des motifs ou des couleurs sur cette forme. Voici quelques exemples.

Tout d'abord, considérons le tore. Un tore est une surface de révolution ayant la forme d'une chambre à air ou d'une bouée – il est engendré en faisant tourner un cercle autour d'un axe extérieur au cercle et situé



9. UN TORE COMPORTANT UN MOTIF correspondant au graphe complet K_7 (sept sommets tous reliés deux à deux par une arête) tracé sur le tore. La conception d'un tel modèle tricoté, où plusieurs segments de droite doivent être représentés sur une surface courbe, n'est pas facile.



10. CES TORES TRICOTÉS EN DEUX COULEURS représentent des nœuds de trèfle (en médailles) tracés sur une surface torique. Sur le tore, le nœud de trèfle correspond à une courbe fermée qui ne se recoupe pas. Il existe en deux chiralités : chaque nœud est une image miroir de l'autre, ici en structure comme en couleur.