

LOGIQUE & CALCUL

L'embarrassant paradoxe de Simpson

*Les statistiques conduisent à des décisions fondées et rationnelles...
à moins qu'un paradoxe ne s'en mêle, comme cela arrive
avec certains jeux de données.*

Jean-Paul DELAHAYE

Un bon paradoxe est un paradoxe dont on ne réussit jamais à se débarrasser. Quand vous croyez en avoir trouvé la clef, une remarque vous fait découvrir que rien n'est résolu. Les paradoxes de Zénon à propos de l'impossibilité du mouvement sont de tels paradoxes. Mais le plus élémentaire de tous est le paradoxe de Simpson dont on imagine des solutions... qui conduisent à d'autres paradoxes !

Sans cesse, des scientifiques et des utilisateurs de statistiques tombent dans les pièges qu'il tend. Chaque année, paraissent des articles qui tentent de déterminer son sens profond et la façon dont on doit le traiter. Malgré cette littérature abondante, il n'est pas certain que l'on détienne une solution entièrement satisfaisante pour se libérer de cette récalcitrante absurdité.

Imaginons la situation suivante. On mène des tests en double aveugle sur un nouveau médicament traitant la maladie grave MG. On a traité 160 patients, dont 80 ont reçu le médicament, et les 80 autres un placebo.

Le taux de guérison varie selon que l'on considère les malades ayant pris le médicament ou ceux ayant pris le placebo (voir le tableau 1 ci-contre). Parmi les 80 patients ayant pris le médicament, 40 ont été guéris (50 %). Parmi les 80 patients ayant reçu le placebo, seuls 32 ont été guéris (40 %). Ces résultats suggèrent que le médicament est efficace. Il faut donc le prescrire pour soigner les patients atteints de la maladie MG.

Mais en analysant plus en détail les données et en considérant le sexe des personnes

ayant participé aux tests, on a une surprise : parmi les hommes, le placebo réussit mieux que le médicament, et il en va de même parmi les femmes. La somme des deux tableaux 2 et 3 redonne bien le tableau 1.

1

Total	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	40	40	50 %
Placebo	32	48	40 %

2

Hommes	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	36	24	60 %
Placebo	14	6	70 %

3

Femmes	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	4	16	20 %
Placebo	18	42	30 %

Les trois tableaux sont compatibles, aucune erreur ne s'est produite. Les résultats sont sans appel : chez les hommes, le placebo est meilleur que le médicament ; chez les femmes, le placebo est meilleur que le médicament. Pourtant, en regroupant hommes et femmes, le médicament produit de meilleurs résultats que le placebo. On se trouve dans un cas du paradoxe de Simpson : la fusion de données concluant individuellement dans un sens – l'inutilité du médicament testé – donne des résultats concluant dans le sens inverse, l'utilité du médicament.

La plus lointaine mention d'un cas analogue remonte à 1899, où le mathématicien anglais Karl Pearson décrit des données équivalentes. Plus tard, en 1903, Undy Yule redécouvrit le phénomène, et le Britannique

Edward Simpson (né en 1922) écrivit en 1951 un article où cette singularité statistique était soigneusement étudiée et discutée. Assez injustement aujourd'hui, ce type de données paradoxales porte son nom.

De nombreux cas réels présentent cette inversion de résultat lorsqu'on regroupe plusieurs catégories complémentaires en une seule. Chaque année, on découvre de nouveaux exemples produisant étonnement et incrédulité. On a rencontré le paradoxe à propos des taux d'admission des filles dans divers départements de l'Université de Berkeley en 1973 : elles étaient meilleures que les garçons dans la plupart des départements de l'université, mais quand on fusionnait les résultats, leur taux général d'admission à l'université était inférieur à celui des garçons. De nombreux cas en médecine ont été rapportés. Le paradoxe a aussi été rencontré à propos de l'analyse des matchs de basket-ball, en démographie, dans l'étude des risques d'accidents, etc. (voir l'encadré 1).

Explication arithmétique

Avant de tenter de savoir s'il faut oui ou non prescrire le médicament testé dans le cas des tableaux 1-3, étudions l'arithmétique du paradoxe. Si l'on note A, B, C et D les quatre nombres du premier tableau, a, b, c et d les quatre nombres du second tableau, a', b', c' et d' les quatre nombres du troisième tableau, on a les relations suivantes :

$$A = a + a'; B = b + b'; C = c + c'; D = d + d'; \\ A/B > C/D; a/b < c/d; a'/b' < c'/d'.$$