

faut prendre des précautions pour agréger des données. Je croyais satisfaisant ce point de vue, quand j'ai pris conscience d'une critique qui en montre l'absurdité.

Plus rien ne va !

Critique du point de vue 2. Imaginons que je dispose aussi d'une statistique sur les patients aux yeux clairs et d'une statistique sur les patients aux yeux foncés, et qu'elles mènent chacune à la conclusion que le médicament est plus efficace que le placebo.

Une telle situation est tout à fait possible et les données que nous proposons pour les tableaux 4 et 5 sont compatibles avec les trois premiers tableaux. C'est ce que démontrent les tableaux suivants 6, 7, 8 et 9 ; pour chacune des quatre catégories « Hommes aux yeux clairs », « Hommes aux yeux foncés », « Femmes aux yeux clairs », « Femmes aux yeux foncés », ils indiquent les taux de réussite respectifs du médicament et du placebo.

On vérifiera sans peine que les tableaux 6 et 7 redonnent 2, que 8 et 9 redonnent 3, que 6 et 8 redonnent 4, et enfin que 7 et 9 redonnent 5. Une situation comme celle envisagée ici est parfaitement possible.

Avec ces tableaux, le point de vue 2 est insoutenable. En effet, si j'adopte ce point de vue et que je l'applique non pas à la distinction homme-femme, mais à la distinction yeux clairs-yeux foncés, je dois conclure qu'il faut prescrire le médicament. Le point de vue 2 conduit donc, selon qu'on s'attache au sexe des patients ou à la couleur de leurs yeux, à des prescriptions contradictoires. Dans le cas décrit par l'ensemble des tableaux présentés, tous parfaitement compatibles, le point de vue 2 conduit à deux conclusions opposées ; il serait irrationnel de le défendre. En résumé, le point de vue 1 est clairement absurde, et le point de vue 2 aussi car il conduit à des prescriptions contradictoires. Comment sortir du paradoxe ?

Il semble inévitable d'opter pour un point de vue prudent et d'admettre que sans données plus précises, aucune prescription ne sera sûre. Ce point de vue 3, expliqué ci-dessous, ne satisfera pas le médecin qui n'a pas la possibilité de différer

3. Le «Double-Simpson»

Ce jeu de données, que nous nommons le « Double-Simpson », a été découvert par Jean-François Colonna le 20 mars 2013 en menant des calculs intensifs. Il a les propriétés paradoxales suivantes.

– Dans le tableau 1, on considère une population de 183 personnes séparées en deux groupes complémentaires dont l'un prend le médicament et l'autre un placebo. Le taux de guérison est meilleur pour le groupe prenant le médicament qui semble donc devoir être prescrit aux malades.

– Quand on sépare les hommes et les femmes (tableaux 2 et 3), pour chaque catégorie le placebo est meilleur que le médicament. C'est le paradoxe de Simpson simple.

– Quand on considère séparément les personnes aux yeux clairs et les personnes aux yeux foncés (tableaux 4 et 5), le médicament est à nouveau meilleur.

– De plus, et ce fut le point le plus délicat à satisfaire, les données des tableaux 1-5 résultent de deux séries de tableaux, soit A6-A7-A8-A9, soit B6-B7-B8-B9, aux propriétés opposées. Pour chacune des quatre catégories (« Hommes aux yeux

clairs », « Hommes aux yeux foncés », « Femmes aux yeux clairs », « Femmes aux yeux foncés »), selon qu'on lit les tableaux A ou B dans la même catégorie, on trouve que le médicament surpasse le placebo ou l'inverse, mais on n'a jamais le même résultat pour A et B.

Cette divergence systématique entre les données A et B montre que quelqu'un disposant des tableaux 1-5 ne peut rien conclure pour aucune personne quelle que soit sa catégorie (Homme, Femme, Yeux clairs, Yeux foncés).

1			
Général	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	47	42	52,80 %
Placebo	38	56	40,42 %

2			
Hommes	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	40	26	60,60 %
Placebo	16	9	64 %

3			
Femmes	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	7	16	30,43 %
Placebo	22	47	31,88 %

4			
Yeux clairs	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	24	19	55,81 %
Placebo	21	28	42,85 %

5			
Yeux foncés	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	23	23	50 %
Placebo	17	28	37,77 %

A6			
H. yeux clairs	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	21	13	61,76 %
Placebo	8	5	61,53 %

A7			
H. yeux foncés	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	19	13	59,37 %
Placebo	8	4	66,66 %

A8			
F. yeux clairs	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	3	6	33,33 %
Placebo	13	23	36,11 %

A9			
F. yeux foncés	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	4	10	28,57 %
Placebo	9	24	27,27 %

B6			
H. yeux clairs	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	21	14	60 %
Placebo	9	4	69,23 %

B7			
H. yeux foncés	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	19	12	61,29 %
Placebo	7	5	58,33 %

B8			
F. yeux clairs	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	3	5	37,50 %
Placebo	12	24	33,33 %

B9			
F. yeux foncés	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	4	11	26,66 %
Placebo	10	23	30,30 %

son choix, mais l'éventualité de cas tels que ceux décrits ci-dessus, et encore plus tels que celui décrit à la figure 4, force cette conclusion attentiste.

Une attitude prudente

Point de vue 3. Dans une situation où seules les données des tableaux 1, 2 et 3 sont disponibles, aucune prescription ne s'impose absolument, du fait de l'existence possible d'une partition contradictoire comme celle donnée par les tableaux 4 et 5. Celui qui dispose des données des tableaux 6, 7, 8 et 9, qui indiquent pour chaque catégorie précise (sexe connu et couleur des yeux connue) si le médicament est meilleur que le placebo pourra en revanche prescrire un traitement à un patient dont on connaît le

sexe et la couleur des yeux : il se référera au tableau le concernant. Ce jugement prudent est confirmé par deux arguments.

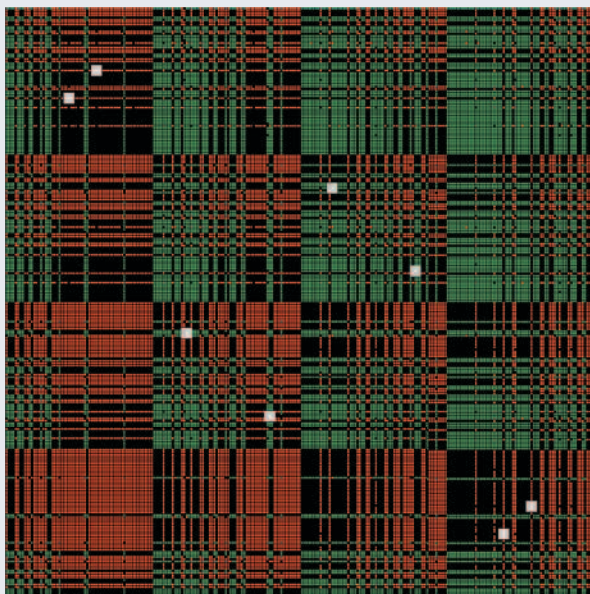
Argument 1. Quand on dispose de données analogues à celles du tableau 1 (indiquant que « le taux de guérison est meilleur avec le médicament qu'avec le placebo ») et que les effectifs ne sont pas trop petits (supérieurs à 3), il est toujours possible de faire une partition des patients en deux catégories complémentaires de façon à avoir des tableaux 2 et 3 produisant des conclusions opposées à celle du tableau 1 (« le placebo est meilleur »).

En effet, composons la catégorie 1 de patients guéris par le placebo (on en garde au moins un pour la catégorie 2) et aucun de la catégorie que le placebo ne guérit pas, auxquels on ajoute tous les patients

que le médicament guérit et quelques patients que le médicament ne guérit pas. Ce choix assure que dans la catégorie 1, le taux de réussite du placebo est 100 %, et qu'il ne l'est pas pour le médicament. Dans la catégorie 2, il n'y a aucun patient que le médicament guérit (ils ont tous été mis dans la catégorie 1) et donc le taux de guérison avec le médicament est nul, ce qu'il n'est pas pour le placebo puisqu'on a réservé au moins un patient guéri par le placebo pour la catégorie 2. Aussi bien dans la catégorie 1 que 2, le placebo sera donc strictement meilleur que le médicament. Si les coefficients du tableau 1 sont $\{2, 2, 2, 3\}$, la méthode décrite donne $\{2, 1, 1, 0\}$ pour le tableau 1 et $\{0, 1, 1, 3\}$ pour le tableau 2.

Ce type de partages est certes artificiel, mais il montre que le risque de paradoxe de

4. Visualisation de la fréquence du paradoxe



$27 = 0 \times 64 + 1 \times 16 + 2 \times 4 + 3 \times 1 = 0123$ en base 4 $216 = 3 \times 64 + 1 \times 16 + 2 \times 4 + 0 \times 1 = 3120$ en base 4

	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	1	3	25 %
Placebo	2	4	33 %

Le placebo est meilleur

Le placebo est meilleur

	Guéri	Non guéri	Taux de guérison
Médicament	5	6	45,45 %
Placebo	4	5	44,44 %

Le médicament est meilleur

Cette figure représente l'ensemble des cas possibles lorsqu'on considère le nombre de guérisons pour des patients hommes prenant le médicament ou le placebo et pour des patientes femmes prenant le médicament ou le placebo (cela correspond aux tableaux 2 et 3 du texte). On a envisagé tous les cas lorsque les huit éléments des deux tableaux parcourent toutes les valeurs entières entre 1 et 4. Cela fait $4^8 = 65\,536$ cas différents.

En regroupant les tableaux hommes et femmes d'un cas, on obtient un tableau de synthèse (hommes et femmes réunis) qui donne parfois une situation de type « paradoxe de Simpson » : les tableaux hommes et femmes vont dans le même sens (le médicament est meilleur, ou le placebo est meilleur), mais le tableau synthétique donne une conclusion opposée.

Chacun des 65 536 cas est représenté par un pixel. Les quatre coefficients du tableau pour les hommes (première colonne : a, b ; deuxième colonne : c, d) fournissent l'abscisse du pixel en considérant le nombre entier dont l'écriture en base 4 a pour chiffres $(a-1), (b-1), (c-1), (d-1)$. Les quatre coefficients

du tableau pour les femmes donnent, selon le même codage, l'ordonnée du pixel. La couleur du pixel est choisie selon les règles suivantes.

– Si on a un cas « normal » (les tableaux hommes et femmes donnent une même conclusion, qui est aussi celle du tableau de synthèse), le pixel est vert ou marron selon que le placebo l'emporte dans le cas général ou non.

– Si on a un cas sans grand intérêt (les tableaux hommes et femmes se contredisent, ou il y a égalité entre les succès du médicament et du placebo), le pixel est noir.

– Si on a un cas de paradoxe de Simpson (le tableau de synthèse s'oppose aux deux tableaux hommes et femmes qui vont dans le même sens), le pixel est clair, entouré d'un halo pour aider à le repérer. Il n'y a que huit cas, correspondant aux huit pixels (27, 216), (39, 228), (78, 114), (114, 78), (141, 177), (177, 141), (216, 27) et (228, 39), le premier étant détaillé ci-contre.

Cette représentation, imaginée et réalisée par Jean-François Colonna, montre qu'heureusement le paradoxe de Simpson se produit assez rarement.