

LOGIQUE & CALCUL

La persistance des nombres

Quand on multiplie les chiffres d'un nombre entier, on trouve un autre nombre entier, et l'on peut recommencer. Combien de fois ? Onze fois au plus... semble-t-il.

Jean-Paul DELAHAYE

Certains problèmes qu'on explique en quelques secondes semblent hors de portée des raisonnements abstraits et des capacités de calcul des plus puissants ordinateurs. Le problème de la persistance multiplicative des nombres en base 10, d'énoncé très simple, est l'une de ces redoutables énigmes où le blocage est total.

Considérons un nombre entier positif, par exemple 377. Multiplions ses chiffres : $3 \times 7 \times 7 = 147$. Opérons de même avec le résultat 147 : $1 \times 4 \times 7 = 28$. Reconnaissons : $2 \times 8 = 16$. Encore : $1 \times 6 = 6$. Arrivé à un nombre d'un seul chiffre, on ne peut plus rien faire : $377 \rightarrow 147 \rightarrow 28 \rightarrow 16 \rightarrow 6$.

Cette suite est la « suite multiplicative » de 377 et la « persistance multiplicative » p de 377 est le nombre de fois qu'il a fallu multiplier les chiffres avant d'arriver à un nombre à un seul chiffre ; ici, $p = 4$.

Voici le tableau des persistances multiplicatives (*en rouge*) des entiers inférieurs à 100 (chaque ligne représente une dizaine) :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
4	1	1	2	2	2	2	3	2	3	3
5	1	1	2	2	3	2	3	2	3	3
6	1	1	2	2	2	3	2	3	3	3
7	1	1	2	3	3	2	4	3	3	3
8	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3
9	1	1	2	3	3	3	3	3	3	2

Parmi les entiers compris entre 0 et 100, 77 a la plus grande persistance : elle vaut 4.

La persistance multiplicative d'un entier ne peut pas être infinie. Ce n'est pas étonnant, mais démontrons-le, nous en tirerons une information plus fine sur la longueur des suites multiplicatives. Quand nous multiplions les chiffres d'un nombre $N = a_1 a_2 \dots a_c$ ayant c chiffres (avec $c \geq 2$), nous obtenons au plus $a_1 \times 9^{c-1}$, car chaque a_i vaut au plus 9. Ce maximum possible est strictement inférieur à N (car $N \geq a_1 \times 10^{c-1}$). La suite multiplicative de N , qui ne comporte que des entiers positifs ou nuls, est strictement décroissante et donc finie.

La persistance atteint-elle un maximum ?

Ce que nous venons de dire permet de majorer la persistance d'un nombre en fonction de son nombre de chiffres. En effet, puisque le produit des chiffres de $N = a_1 a_2 \dots a_c$ est inférieur ou égal à $a_1 \times 9^{c-1}$, le produit des chiffres d'un nombre N de c chiffres est inférieur à $N \times (9/10)^{c-1}$. Comme $(9/10)^{22} = 0,09847\dots < 1/10$, on en déduit que si N a 23 chiffres ou plus, le nombre de chiffres du produit des chiffres de N est strictement inférieur au nombre de chiffres de N . Il s'ensuit que la persistance de N est majorée par le nombre de chiffres de N plus une constante. Des calculs complémentaires montrent que la constante 2 convient jusqu'à 10^{23} , et

donc qu'elle convient aussi pour tout N : la persistance d'un entier N de c chiffres est toujours inférieure ou égale à $c + 2$.

Maintenant se posent les questions

naturelles et élémentaires suivantes :

- La persistance d'un nombre peut-elle être n'importe quel entier ?
- Si ce n'est pas le cas, quelle est la persistance maximale d'un nombre ?

Ces questions paraissent faciles, dans la mesure où l'ordinateur peut suppléer à nos capacités limitées de manipulation des chiffres. L'expérience montre qu'il n'en est rien : jusqu'à présent, ni le raisonnement ni le calcul par ordinateur n'ont permis de trouver d'entiers ayant une persistance supérieure à 11 ! Et l'on désespère d'en découvrir, ainsi que de réussir à prouver que 11 est le maximum.

Voici le tableau des entiers N les plus petits ayant une persistance multiplicative p égale à 1, 2, 3, ..., 11 :

p	N
1	10
2	25
3	39
4	77
5	679
6	6788
7	68889
8	2677889
9	26888999
10	3778888999
11	277777788888899