

LOGIQUE & CALCUL

La persistance des nombres

Quand on multiplie les chiffres d'un nombre entier, on trouve un autre nombre entier, et l'on peut recommencer. Combien de fois ? Onze fois au plus... semble-t-il.

Jean-Paul DELAHAYE

Certains problèmes qu'on explique en quelques secondes semblent hors de portée des raisonnements abstraits et des capacités de calcul des plus puissants ordinateurs. Le problème de la persistance multiplicative des nombres en base 10, d'énoncé très simple, est l'une de ces redoutables énigmes où le blocage est total.

Considérons un nombre entier positif, par exemple 377. Multiplions ses chiffres : $3 \times 7 \times 7 = 147$. Opérons de même avec le résultat 147 : $1 \times 4 \times 7 = 28$. Reconnaissons : $2 \times 8 = 16$. Encore : $1 \times 6 = 6$. Arrivé à un nombre d'un seul chiffre, on ne peut plus rien faire : $377 \rightarrow 147 \rightarrow 28 \rightarrow 16 \rightarrow 6$.

Cette suite est la « suite multiplicative » de 377 et la « persistance multiplicative » p de 377 est le nombre de fois qu'il a fallu multiplier les chiffres avant d'arriver à un nombre à un seul chiffre ; ici, $p = 4$.

Voici le tableau des persistances multiplicatives (*en rouge*) des entiers inférieurs à 100 (chaque ligne représente une dizaine) :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
4	1	1	2	2	2	3	2	3	2	3
5	1	1	2	2	3	2	3	2	3	3
6	1	1	2	2	2	3	2	3	3	3
7	1	1	2	3	3	2	4	3	3	3
8	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3
9	1	1	2	3	3	3	3	3	3	2

Parmi les entiers compris entre 0 et 100, 77 a la plus grande persistance : elle vaut 4.

La persistance multiplicative d'un entier ne peut pas être infinie. Ce n'est pas étonnant, mais démontrons-le, nous en tirerons une information plus fine sur la longueur des suites multiplicatives. Quand nous multiplions les chiffres d'un nombre $N = a_1 a_2 \dots a_c$ ayant c chiffres (avec $c \geq 2$), nous obtenons au plus $a_1 \times 9^{c-1}$, car chaque a_i vaut au plus 9. Ce maximum possible est strictement inférieur à N (car $N \geq a_1 \times 10^{c-1}$). La suite multiplicative de N , qui ne comporte que des entiers positifs ou nuls, est strictement décroissante et donc finie.

La persistance atteint-elle un maximum ?

Ce que nous venons de dire permet de majorer la persistance d'un nombre en fonction de son nombre de chiffres. En effet, puisque le produit des chiffres de $N = a_1 a_2 \dots a_c$ est inférieur ou égal à $a_1 \times 9^{c-1}$, le produit des chiffres d'un nombre N de c chiffres est inférieur à $N \times (9/10)^{c-1}$. Comme $(9/10)^{22} = 0,09847\dots < 1/10$, on en déduit que si N a 23 chiffres ou plus, le nombre de chiffres du produit des chiffres de N est strictement inférieur au nombre de chiffres de N . Il s'ensuit que la persistance de N est majorée par le nombre de chiffres de N plus une constante. Des calculs complémentaires montrent que la constante 2 convient jusqu'à 10^{23} , et

donc qu'elle convient aussi pour tout N : la persistance d'un entier N de c chiffres est toujours inférieure ou égale à $c + 2$.

Maintenant se posent les questions naturelles et élémentaires suivantes :

– La persistance d'un nombre peut-elle être n'importe quel entier ?

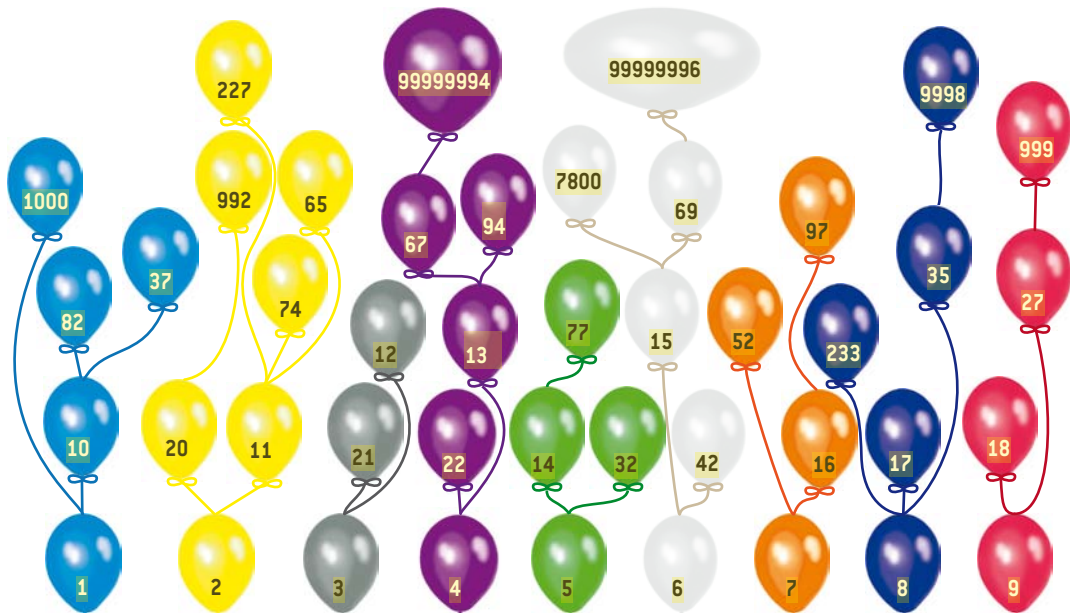
– Si ce n'est pas le cas, quelle est la persistance maximale d'un nombre ?

Ces questions paraissent faciles, dans la mesure où l'ordinateur peut suppléer à nos capacités limitées de manipulation des chiffres. L'expérience montre qu'il n'en est rien : jusqu'à présent, ni le raisonnement ni le calcul par ordinateur n'ont permis de trouver d'entiers ayant une persistance supérieure à 11 ! Et l'on désespère d'en découvrir, ainsi que de réussir à prouver que 11 est le maximum.

Voici le tableau des entiers N les plus petits ayant une persistance multiplicative p égale à 1, 2, 3, ..., 11 :

p	N
1	10
2	25
3	39
4	77
5	679
6	6788
7	68889
8	2677889
9	26888999
10	3778888999
11	277777788888899

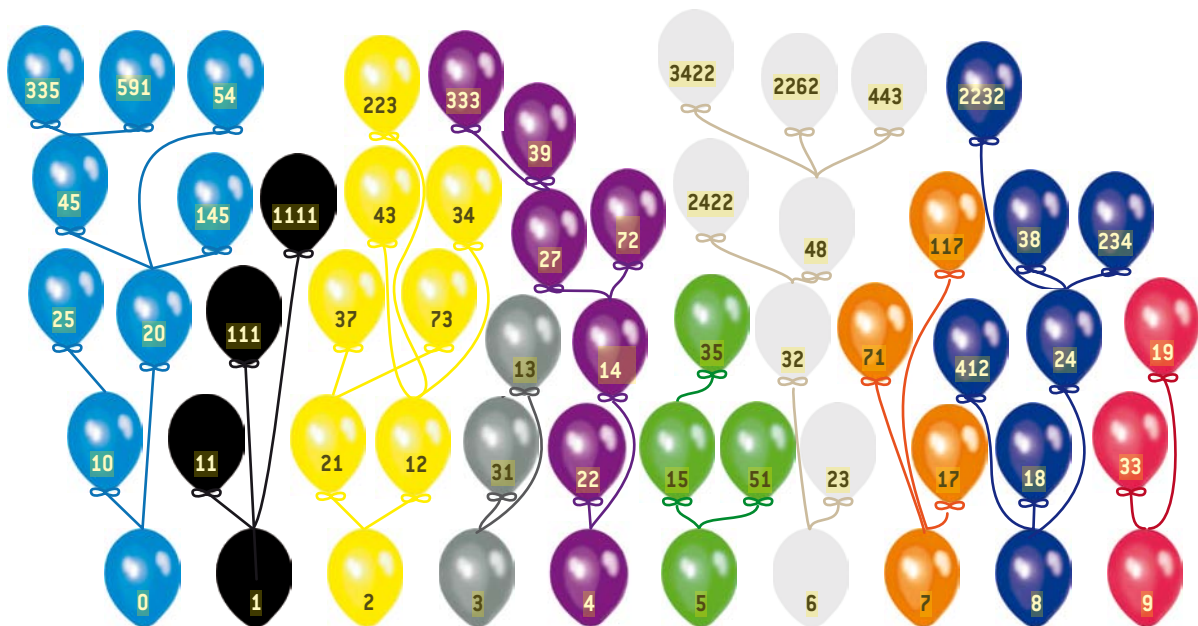
1. La persistance additive



On obtient la persistance additive en additionnant tous les chiffres d'un nombre à chaque étape : $32529 \rightarrow 3 + 2 + 5 + 2 + 9 = 21 \rightarrow 2 + 1 = 3$. Ici la persistance additive est 2, le nombre d'étapes. Le chiffre final que l'on

trouve est utilisé depuis toujours dans les « preuves par 9 » : on démontre que le point final de N est le reste de la division de N par 9 (ici, 9 étant équivalent à 0). Des exemples sont indiqués pour les différents points finals.

2. La persistance multiplicative



Pour calculer la persistance multiplicative d'un nombre, on multiplie ses chiffres. Avec le nouveau nombre obtenu, on recommence l'opération, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre constitué d'un seul chiffre. Le nombre d'étapes de l'opération est la persistance multiplicative du nombre. Ainsi, en partant de 335, on passe à 45, puis

à 20, puis à 0 ; la persistance est égale à 3. Le dessin représente quelques nombres et les suites de nombres qu'on en déduit. On démontre sans mal que la persistance additive est aussi grande que l'on veut ; en revanche, on ne sait pas le démontrer pour la persistance multiplicative, qui semble ne jamais dépasser 11.

3. Une variante de John Conway

Le mathématicien britannique John Conway, inventeur du Jeu de la vie et de mille autres curiosités mathématiques, a proposé en 2007 une énigme dont le principe ressemble à celui de la persistance multiplicative et qui conduit à une très étrange situation.

Partant d'un nombre N , par exemple 3 462, on calcule le successeur de N en écrivant ce nombre comme un « train de puissances » $3^4 6^2$ et en effectuant l'évaluation $3^4 6^2 = 2 916$. Puis on recommence.

Ainsi, $2 916 \rightarrow 2^9 1^6 = 512 \rightarrow 5^1 2 = 10 \rightarrow 1^0 = 1$ (quand N est composé d'un nombre impair de chiffres, le dernier chiffre n'a pas d'exposant. Quand c'est nécessaire, on utilise la convention $0^0 = 1$.)

La question posée par J. Conway est : existe-t-il des nombres indestructibles, c'est-à-dire dont le calcul par sa règle ne conduit pas à un nombre constitué d'un seul chiffre ?



Neil Sloane



John Conway

Il trouva le nombre indestructible 2592 :

$$2\,592 \rightarrow 2^5 9^2 = 2\,592$$

N'en trouvant aucun autre, il conjectura que c'était le seul nombre indestructible. Neil Sloane effectua une recherche plus approfondie et découvrit :

$$24\,547\,284\,284\,866\,560\,000\,000\,000 \rightarrow$$

$$2^4 5^4 7^2 8^4 2^8 4^8 6^6 5^6 0^0 0^0 0^0 0^0 =$$

$$24\,547\,284\,284\,866\,560\,000\,000\,000$$

N. Sloane conjecture maintenant qu'il n'en existe pas d'autres. La situation est assez étonnante. L'opération de calcul du « train de puissances » détruit tous les entiers, car ils sont rapidement réduits à un seul chiffre, sauf deux nombres, 2 592 et 24 547 284 284 866 560 000 000 000. Qu'ont-ils donc de particulier ? Un lecteur essaiera-t-il de vérifier qu'il n'y a pas de troisième exception en prenant des nombres plus grands ?

Le plus ancien document sur la persistance des nombres est un article de 1973 écrit par Neil Sloane. Il indiquait qu'aucun nombre jusqu'à 10^{50} n'a de persistance supérieure à 11. N. Sloane formulait aussi la conjecture qu'il existe un nombre c (probablement 11) tel qu'aucun entier N n'a une persistance multiplicative supérieure à c .

La notion de persistance multiplicative a aussi un sens dans les autres bases de numération que 10. Sous sa forme générale, la conjecture énoncée par N. Sloane était que pour toute base de numération b , il existe une constante $p_{\max}(b)$ (dépendante de b), qui indique le maximum possible pour la persistance des entiers écrits en base b .

Vérifier jusqu'à 10^{500}

Dans le cas de la base 10, les calculs les plus avancés effectués en 2011 par Mark Diamond, en Australie, assurent qu'aucun nombre inférieur à 10^{333} n'a une persistance supérieure à 11. On conjecture donc de plus en plus fortement que $p_{\max}(10) = 11$: en base 10, aucun entier n'aurait une persistance multiplicative supérieure à 11.

Faire la vérification jusqu'à 10^{333} en prenant les entiers les uns après les autres est totalement impossible. Les calculs les plus longs, entrepris par exemple pour factoriser de grands entiers ou relever des défis cryptographiques, comportent environ 10^{21} opérations.

De tels calculs ont occupé des dizaines de machines assez puissantes pendant des semaines et leur coût est élevé. Mener un calcul demandant plus de 10^{21} opérations élémentaires (ou instructions) est peut-être envisageable, mais 10^{25} est une borne technologique qu'on ne dépassera pas avant plusieurs années. Bien sûr, 10^{333} risque d'être à tout jamais inenvisageable.

Il est donc intéressant de comprendre comment on a pu aller jusqu'à 10^{333} . Cela illustre l'idée que dans la programmation d'un ordinateur même puissant, l'intelligence et les mathématiques sont utiles, et permettent de dépasser très largement les limites que la technologie fixe à celui qui se précipite bêtement. Tout se fonde sur une série de remarques impliquant chacune une économie de calcul. Ici, il n'est question que de la persistance multiplicative en base 10, que nous abrégeons en « persistance ».

Remarque 1. Dès qu'un nombre comporte un chiffre 0, sa persistance est 1. Il n'est donc pas nécessaire de s'occuper des nombres comportant un ou plusieurs 0.

Remarque 2. En enlevant tous les chiffres 1 d'un nombre, on ne change pas sa persistance. Il est donc inutile de s'occuper des nombres comportant des 1.

Remarque 3. Si un nombre comporte un chiffre pair (2, 4, 6 ou 8) et un 5, sa persistance est au plus 2, car le produit de ses chiffres se termine par un 0. Il sera donc

inutile de considérer les nombres comportant à la fois un chiffre pair et un 5 (exemple : $7877995 \rightarrow 1111320 \rightarrow 0$).

Remarque 4. L'ordre des chiffres d'un nombre est sans importance pour le calcul de sa persistance. C'est évident, puisque le produit de ses chiffres ne dépend pas de l'ordre dans lequel ils sont écrits ; ainsi, 23 477 et 77 324 ont la même persistance. On pourra donc considérer uniquement les nombres dont les chiffres sont classés par ordre croissant, tel 222 667 779 999. On n'oubliera aucun nombre en procédant ainsi ; par exemple, 772 992 ne sera pas traité directement, mais le sera indirectement via le nombre 227 799, qui est plus petit et de même persistance.

Remarque 5. En remplaçant les 8 d'un nombre N auquel on s'intéresse par 222, les 4 par 22, les 6 par 23, les 9 par 33 (par exemple, 8 726 793 devient 22 272 237 333), on obtient un nombre ayant la même persistance que N , qu'on nommera *forme normalisée* de N . On pourra donc n'étudier que les nombres ne comportant que les chiffres premiers : 2, 3, 5 et 7.

En cumulant les cinq remarques, on en déduit que tout entier qui n'aboutit pas à 0 en deux étapes a la même persistance qu'un nombre de la forme 222...2333...3777...7 ou 333...3555...5777...7.

Dans un test entrepris en 2011, M. Diamond a effectivement calculé la persistance