

3. Une variante de John Conway

Le mathématicien britannique John Conway, inventeur du Jeu de la vie et de mille autres curiosités mathématiques, a proposé en 2007 une énigme dont le principe ressemble à celui de la persistance multiplicative et qui conduit à une très étrange situation.

Partant d'un nombre N , par exemple 3 462, on calcule le successeur de N en écrivant ce nombre comme un « train de puissances » $3^4 6^2$ et en effectuant l'évaluation $3^4 6^2 = 2 916$. Puis on recommence.

Ainsi, $2 916 \rightarrow 2^9 1^6 = 512 \rightarrow 5^1 2 = 10 \rightarrow 1^0 = 1$ (quand N est composé d'un nombre impair de chiffres, le dernier chiffre n'a pas d'exposant. Quand c'est nécessaire, on utilise la convention $0^0 = 1$.)

La question posée par J. Conway est : existe-t-il des nombres indestructibles, c'est-à-dire dont le calcul par sa règle ne conduit pas à un nombre constitué d'un seul chiffre ?



Neil Sloane



John Conway

Il trouva le nombre indestructible 2592 :

$$2\,592 \rightarrow 2^5 9^2 = 2\,592$$

N'en trouvant aucun autre, il conjectura que c'était le seul nombre indestructible. Neil Sloane effectua une recherche plus approfondie et découvrit :

$$24\,547\,284\,284\,866\,560\,000\,000\,000 \rightarrow$$

$$2^4 5^4 7^2 8^4 2^8 4^8 6^6 5^6 0^0 0^0 0^0 0^0 =$$

$$24\,547\,284\,284\,866\,560\,000\,000\,000$$

N. Sloane conjecture maintenant qu'il n'en existe pas d'autres. La situation est assez étonnante. L'opération de calcul du « train de puissances » détruit tous les entiers, car ils sont rapidement réduits à un seul chiffre, sauf deux nombres, 2 592 et 24 547 284 284 866 560 000 000 000. Qu'ont-ils donc de particulier ? Un lecteur essaiera-t-il de vérifier qu'il n'y a pas de troisième exception en prenant des nombres plus grands ?

Le plus ancien document sur la persistance des nombres est un article de 1973 écrit par Neil Sloane. Il indiquait qu'aucun nombre jusqu'à 10^{50} n'a de persistance supérieure à 11. N. Sloane formulait aussi la conjecture qu'il existe un nombre c (probablement 11) tel qu'aucun entier N n'a une persistance multiplicative supérieure à c .

La notion de persistance multiplicative a aussi un sens dans les autres bases de numération que 10. Sous sa forme générale, la conjecture énoncée par N. Sloane était que pour toute base de numération b , il existe une constante $p_{\max}(b)$ (dépendante de b), qui indique le maximum possible pour la persistance des entiers écrits en base b .

Vérifier jusqu'à 10^{500}

Dans le cas de la base 10, les calculs les plus avancés effectués en 2011 par Mark Diamond, en Australie, assurent qu'aucun nombre inférieur à 10^{333} n'a une persistance supérieure à 11. On conjecture donc de plus en plus fortement que $p_{\max}(10) = 11$: en base 10, aucun entier n'aurait une persistance multiplicative supérieure à 11.

Faire la vérification jusqu'à 10^{333} en prenant les entiers les uns après les autres est totalement impossible. Les calculs les plus longs, entrepris par exemple pour factoriser de grands entiers ou relever des défis cryptographiques, comportent environ 10^{21} opérations.

De tels calculs ont occupé des dizaines de machines assez puissantes pendant des semaines et leur coût est élevé. Mener un calcul demandant plus de 10^{21} opérations élémentaires [ou instructions] est peut-être envisageable, mais 10^{25} est une borne technologique qu'on ne dépassera pas avant plusieurs années. Bien sûr, 10^{333} risque d'être à tout jamais inenvisageable.

Il est donc intéressant de comprendre comment on a pu aller jusqu'à 10^{333} . Cela illustre l'idée que dans la programmation d'un ordinateur même puissant, l'intelligence et les mathématiques sont utiles, et permettent de dépasser très largement les limites que la technologie fixe à celui qui se précipite bêtement. Tout se fonde sur une série de remarques impliquant chacune une économie de calcul. Ici, il n'est question que de la persistance multiplicative en base 10, que nous abrégeons en « persistance ».

Remarque 1. Dès qu'un nombre comporte un chiffre 0, sa persistance est 1. Il n'est donc pas nécessaire de s'occuper des nombres comportant un ou plusieurs 0.

Remarque 2. En enlevant tous les chiffres 1 d'un nombre, on ne change pas sa persistance. Il est donc inutile de s'occuper des nombres comportant des 1.

Remarque 3. Si un nombre comporte un chiffre pair (2, 4, 6 ou 8) et un 5, sa persistance est au plus 2, car le produit de ses chiffres se termine par un 0. Il sera donc

inutile de considérer les nombres comportant à la fois un chiffre pair et un 5 (exemple : $7877995 \rightarrow 1111320 \rightarrow 0$).

Remarque 4. L'ordre des chiffres d'un nombre est sans importance pour le calcul de sa persistance. C'est évident, puisque le produit de ses chiffres ne dépend pas de l'ordre dans lequel ils sont écrits ; ainsi, 23 477 et 77 324 ont la même persistance. On pourra donc considérer uniquement les nombres dont les chiffres sont classés par ordre croissant, tel 222 667 779 999. On n'oubliera aucun nombre en procédant ainsi ; par exemple, 772 992 ne sera pas traité directement, mais le sera indirectement via le nombre 227 799, qui est plus petit et de même persistance.

Remarque 5. En remplaçant les 8 d'un nombre N auquel on s'intéresse par 222, les 4 par 22, les 6 par 23, les 9 par 33 (par exemple, 8 726 793 devient 22 272 237 333), on obtient un nombre ayant la même persistance que N , qu'on nommera *forme normalisée* de N . On pourra donc n'étudier que les nombres ne comportant que les chiffres premiers : 2, 3, 5 et 7.

En cumulant les cinq remarques, on en déduit que tout entier qui n'aboutit pas à 0 en deux étapes a la même persistance qu'un nombre de la forme 222...2333...3777...7 ou 333...3555...5777...7.

Dans un test entrepris en 2011, M. Diamond a effectivement calculé la persistance