## 3. Une variante de John Conway

Le mathématicien britannique John Conway, inventeur du Jeu de la vie et de mille autres curiosités mathématiques, a proposé en 2007 une énigme dont le principe ressemble à celui de la persistance multiplicative et qui conduit à une très étrange situation.

Partant d'un nombre $N$, par exemple 3 462, on calcule le successeur de $N$ en écrivant ce nombre comme un « train de puissances » $3^4 6^2$ et en effectuant l'évaluation $3^4 6^2 = 2\,916$. Puis on recommence.

Ainsi, $2916 \rightarrow 2^9 1^6 = 512 \rightarrow 5^1 2 = 10 \rightarrow 1^0 = 1$ (quand $N$ est composé d'un nombre impair de chiffres, le dernier chiffre n'a pas d'exposant. Quand c'est nécessaire, on utilise la convention $0^0 = 1$.)

La question posée par J. Conway est : existe-t-il des nombres indestructibles, c'est-à-dire dont le calcul par sa règle ne conduit pas à un nombre constitué d'un seul chiffre ?

Neil Sloane

John Conway

Il trouva le nombre indestructible 2592 :

$2\,592 \rightarrow 2^5 9^2 = 2\,592$

N'en trouvant aucun autre, il conjectura que c'était le seul nombre indestructible. Neil Sloane effectua une recherche plus approfondie et découvrit :

$24\,547\,284\,284\,866\,560\,000\,000\,000 \rightarrow$
$2^4 5^4 7^2 8^4 2^8 4^8 6^6 5^6 0^0 0^0 0^0 0^0 0^0 =$
$24\,547\,284\,284\,866\,560\,000\,000\,000$

N. Sloane conjecture maintenant qu'il n'en existe pas d'autres. La situation est assez étonnante. L'opération de calcul du « train de puissances » détruit tous les entiers, car ils sont rapidement réduits à un seul chiffre, sauf deux nombres, 2 592 et 24 547 284 284 866 560 000 000 000. Qu'ont-ils donc de particulier ? Un lecteur essaiera-t-il de vérifier qu'il n'y a pas de troisième exception en prenant des nombres plus grands ?

Le plus ancien document sur la persistance des nombres est un article de 1973 écrit par Neil Sloane. Il indiquait qu'aucun nombre jusqu'à $10^{50}$ n'a de persistance supérieure à 11. N. Sloane formulait aussi la conjecture qu'il existe un nombre $c$ (probablement 11) tel qu'aucun entier $N$ n'a une persistance multiplicative supérieure à $c$.

La notion de persistance multiplicative a aussi un sens dans les autres bases de numération que 10. Sous sa forme générale, la conjecture énoncée par N. Sloane était que pour toute base de numération $b$, il existe une constante $p_{max}(b)$ (dépendante de $b$), qui indique le maximum possible pour la persistance des entiers écrits en base $b$.

## Vérifier jusqu'à $10^{500}$

Dans le cas de la base 10, les calculs les plus avancés effectués en 2011 par Mark Diamond, en Australie, assurent qu'aucun nombre inférieur à $10^{333}$ n'a une persistance supérieure à 11. On conjecture donc de plus en plus fortement que $p_{max}(10) = 11$ : en base 10, aucun entier n'aurait une persistance multiplicative supérieure à 11.

Faire la vérification jusqu'à $10^{333}$ en prenant les entiers les uns après les autres est totalement impossible. Les calculs les plus longs, entrepris par exemple pour factoriser de grands entiers ou relever des défis cryptographiques, comportent environ $10^{21}$ opérations. De tels calculs ont occupé des dizaines de machines assez puissantes pendant des semaines et leur coût est élevé. Mener un calcul demandant plus de $10^{21}$ opérations élémentaires (ou instructions) est peut-être envisageable, mais $10^{25}$ est une borne technologique qu'on ne dépassera pas avant plusieurs années. Bien sûr, $10^{333}$ risque d'être à tout jamais inenvisageable.

Il est donc intéressant de comprendre comment on a pu aller jusqu'à $10^{333}$. Cela illustre l'idée que dans la programmation d'un ordinateur même puissant, l'intelligence et les mathématiques sont utiles, et permettent de dépasser très largement les limites que la technologie fixe à celui qui se précipite bêtement. Tout se fonde sur une série de remarques impliquant chacune une économie de calcul. Ici, il n'est question que de la persistance multiplicative en base 10, que nous abrégeons en «persistance».

**Remarque 1.** Dès qu'un nombre comporte un chiffre 0, sa persistance est 1. Il n'est donc pas nécessaire de s'occuper des nombres comportant un ou plusieurs 0.

**Remarque 2.** En enlevant tous les chiffres 1 d'un nombre, on ne change pas sa persistance. Il est donc inutile de s'occuper des nombres comportant des 1.

**Remarque 3.** Si un nombre comporte un chiffre pair (2, 4, 6 ou 8) et un 5, sa persistance est au plus 2, car le produit de ses chiffres se termine par un 0. Il sera donc inutile de considérer les nombres comportant à la fois un chiffre pair et un 5 (exemple : 7877995 → 1111320 → 0).

**Remarque 4.** L'ordre des chiffres d'un nombre est sans importance pour le calcul de sa persistance. C'est évident, puisque le produit de ses chiffres ne dépend pas de l'ordre dans lequel ils sont écrits ; ainsi, 23 477 et 77 324 ont la même persistance. On pourra donc considérer uniquement les nombres dont les chiffres sont classés par ordre croissant, tel 222 667 779 999. On n'oubliera aucun nombre en procédant ainsi ; par exemple, 772 992 ne sera pas traité directement, mais le sera indirectement *via* le nombre 227 799, qui est plus petit et de même persistance.

**Remarque 5.** En remplaçant les 8 d'un nombre $N$ auquel on s'intéresse par 22, les 4 par 22, les 6 par 23, les 9 par 33 (par exemple, 8 726 793 devient 22 272 237 333), on obtient un nombre ayant la même persistance que $N$, qu'on nommera *forme normalisée* de $N$. On pourra donc n'étudier que les nombres ne comportant que les chiffres premiers : 2, 3, 5 et 7.

En cumulant les cinq remarques, on en déduit que tout entier qui n'aboutit pas à 0 en deux étapes a la même persistance qu'un nombre de la forme 222...2333...3777...7 ou 333...3555...5777...7.

Dans un test entrepris en 2011, M. Diamond a effectivement calculé la persistance

de tous les nombres d'une des deux formes ci-dessus comportant jusqu'à 1 000 fois le chiffre 2, 1 000 fois le 3, 1 000 fois le 5, 1 000 fois le 7. Aucun nombre de persistance supérieure à 11 n'a été trouvé.

Remarquons que ce test n'a pas porté sur le nombre 88…8 comportant 334 fois le 8, car il n'est pas traité directement et que lorsqu'on le met sous la forme normalisée, il devient 222…2 avec 1 002 fois le 2, dont la persistance n'a pas été calculée par M. Diamond. Ce nombre 88…8 (334 fois le 8) est le plus petit ayant échappé au test, car les autres substitutions pour mettre un nombre sous forme normale (4 → 22, 6 → 23, 9 → 33) rallongent moins que la substitution 8 → 222. Il en résulte que tous les nombres de 333 chiffres ou moins ont été envisagés directement ou indirectement par le test réalisé en 2011 (qui en a traité d'autres, mais de manière non systématique, au-delà de $10^{333}$).

## Toujours pas de théorème

Le test de M. Diamond, qui couvre tous les entiers jusqu'à $10^{333}$, a effectué environ deux milliards de calculs de persistance au total. En effet, il y a exactement $1001^3 = 1\,003\,003\,001$ nombres de la forme 222…2333…3777…7 où le 2 apparaît entre 0 et 1 000 fois, le 3 entre 0 et 1 000 fois, le 7 entre 0 et 1 000 fois. Il y a autant de nombres de la seconde forme (333…3555…5777…7), ce qui fait un total de 2 006 006 002 nombres passés directement par le test. Par rapport aux $10^{333}$ cas à traiter pour celui qui ne réfléchit pas, le gain est colossal ! En mai 2013, Francesco De Comité, au LIFL, a poussé la vérification jusqu'à $10^{500}$.

Il est intéressant que la conjecture ait été testée aussi loin. Mais aux yeux du mathématicien, tant qu'un raisonnement n'aura pas été trouvé, on continuera de parler de conjecture et non de théorème.

Même si on ne peut aujourd'hui être certain que la persistance d'un entier est au plus 11, on peut se consoler avec le résultat suivant, qui donne la persistance en moyenne d'un nombre à l'infini : la persistance multiplicative moyenne des nombres compris entre 1 et $N$ tend vers 1 quand $N$ tend vers l'infini (elle est donc largement inférieure à 11). Comme nous allons le voir, ce résultat (démontré) provient de l'étude des points finals des suites multiplicatives.

Chaque suite multiplicative en base 10 se termine par l'un des dix chiffres, son point final (parfois nommé *multiplicative digital root* en anglais). On en trouve une table sur http://oeis.org/A031347.

Cependant, tous les chiffres n'ont pas la même probabilité d'être un point final. Le calcul indique que pour $N$ variant entre 1 et 100, on obtient 25 fois le 0 comme point final, seulement 2 fois le 1 et 23 fois le 8. Le tableau ci-dessous précise ce qui se passe quand $N$ varie entre 1 et 100, puis entre 1 et 1 000, puis entre 1 et 10 000, etc.

On le voit, une majorité de plus en plus importante de nombres ont pour point final le chiffre 0. Il semble même que la proportion d'entiers positifs inférieurs à $N$ dont le point final est 0 tend progressivement vers 100 %. Pour le démontrer, on remarque que lorsqu'on prend au hasard un nombre de $c$ chiffres, la probabilité qu'il ne comporte aucun 0 est $(9/10)^{c-1}$ (son deuxième chiffre n'est pas un 0 neuf fois sur dix ; de même pour le troisième chiffre, etc.). Cette probabilité tend vers 0 quand $c$ tend vers l'infini.

Puisqu'un nombre qui comporte un 0 a une persistance égale à 1 et que ceux qui n'ont pas la persistance 1 ont une persistance majorée par $c + 2$ *(voir plus haut)*, il s'ensuit que la persistance multiplicative moyenne d'un entier inférieur à $N$ tend vers 1 quand $N$ tend vers l'infini.

Malheureusement, le fait de savoir que cette moyenne est égale à 1 ne permet pas de savoir si 11 est le maximum : la moyenne ne dit rien sur les écarts à la moyenne !

À propos des points finals d'une suite multiplicative, une autre question pourtant simple reste non résolue. On remarque qu'entre 1 et $10^n$, le point final 1 est obtenu $n$ fois exactement *(voir la colonne sous le 1)*. Cela provient de ce que le produit des chiffres d'un entier vaut 1 si et seulement si cet entier ne comporte que des 1, c'est-à-dire si c'est un nombre parmi 1, 11, 111, 1 111, 11 111, etc. Entre 1 et $10^n$, il y a donc au moins $n$ nombres dont le point final est 1 (d'ailleurs atteint en une seule étape).

## Points finals et *rep-units*

Pour prouver qu'entre 1 et $10^n$, il y a exactement $n$ entiers ayant pour point final le 1, il suffit donc de prouver que les nombres de la forme 1111…1, dénommés *rep-units*, ont toujours un autre diviseur premier que 2, 3, 5 ou 7. En effet, si un *rep-unit* A n'avait comme facteurs premiers que 2, 3, 5 et 7, alors il existerait un nombre B (celui ayant les facteurs premiers de A comme chiffres) qui ne serait pas un *rep-unit*, mais qui en donnerait un par multiplication de ses chiffres, et aurait donc 1 comme point final. Du coup, il y aurait toujours, entre 1 et $10^n$, plus de $n$ entiers ayant le point final 1 pour $n$ assez grand.

Les *rep-units* ont été largement étudiés. Des pages Internet leur sont consacrées, mais rien ne permet d'affirmer que tous ont un facteur premier supérieur à 9. Ceux déjà factorisés ont tous un facteur premier supérieur à 9 *(voir http://homepage2.nifty.com/m_kamada/math/11111.htm)*, mais qu'en est-il des autres ? Personne, à ma

**Répartition des nombres entre 1 et $10^n$ en fonction de leur « point final »**

| Point final | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre 1 et 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Entre 1 et $10^2$ | 25 | 2 | 9 | 3 | 10 | 7 | 14 | 3 | 23 | 4 |
| Entre 1 et $10^3$ | 477 | 3 | 77 | 6 | 65 | 40 | 155 | 6 | 161 | 10 |
| Entre 1 et $10^4$ | 6 740 | 4 | 543 | 10 | 279 | 172 | 1 172 | 10 | 1 050 | 20 |
| Entre 1 et $10^5$ | 82 402 | 5 | 3 213 | 15 | 894 | 607 | 6 843 | 15 | 5 971 | 35 |