

de tous les nombres d'une des deux formes ci-dessus comportant jusqu'à 1 000 fois le chiffre 2, 1 000 fois le 3, 1 000 fois le 5, 1 000 fois le 7. Aucun nombre de persistance supérieure à 11 n'a été trouvé.

Remarquons que ce test n'a pas porté sur le nombre 88...8 comportant 334 fois le 8, car il n'est pas traité directement et que lorsqu'on le met sous la forme normalisée, il devient 222...2 avec 1 002 fois le 2, dont la persistance n'a pas été calculée par M. Diamond. Ce nombre 88...8 (334 fois le 8) est le plus petit ayant échappé au test, car les autres substitutions pour mettre un nombre sous forme normale (4 → 22, 6 → 23, 9 → 33) rallongent moins que la substitution 8 → 222. Il en résulte que tous les nombres de 333 chiffres ou moins ont été envisagés directement ou indirectement par le test réalisé en 2011 (qui en a traité d'autres, mais de manière non systématique, au-delà de 10^{333}).

Toujours pas de théorème

Le test de M. Diamond, qui couvre tous les entiers jusqu'à 10^{333} , a effectué environ deux milliards de calculs de persistance au total. En effet, il y a exactement $1001^3 = 1\,003\,003\,001$ nombres de la forme 222...2333...3777...7 où le 2 apparaît entre 0 et 1 000 fois, le 3 entre 0 et 1 000 fois, le 7 entre 0 et 1 000 fois. Il y a autant de nombres de la seconde forme (333...3555...5777...7), ce qui fait un total de 2 006 006 002 nombres passés directement par le test. Par rapport aux 10^{333} cas à traiter pour celui qui ne réfléchit pas, le gain est colossal ! En mai 2013, Francesco De Comité, au LIFL, a poussé la vérification jusqu'à 10^{500} .

Il est intéressant que la conjecture ait été testée aussi loin. Mais aux yeux du mathématicien, tant qu'un raisonnement n'aura pas été trouvé, on continuera de parler de conjecture et non de théorème.

Même si on ne peut aujourd'hui être certain que la persistance d'un entier est au plus 11, on peut se consoler avec le résultat suivant, qui donne la persistance en moyenne d'un nombre à l'infini : la persistance multiplicative moyenne

des nombres compris entre 1 et N tend vers 1 quand N tend vers l'infini (elle est donc largement inférieure à 11). Comme nous allons le voir, ce résultat (démontré) provient de l'étude des points finals des suites multiplicatives.

Chaque suite multiplicative en base 10 se termine par l'un des dix chiffres, son point final (parfois nommé *multiplicative digital root* en anglais). On en trouve une table sur <http://oeis.org/A031347>.

Cependant, tous les chiffres n'ont pas la même probabilité d'être un point final. Le calcul indique que pour N variant entre 1 et 100, on obtient 25 fois le 0 comme point final, seulement 2 fois le 1 et 23 fois le 8. Le tableau ci-dessous précise ce qui se passe quand N varie entre 1 et 100, puis entre 1 et 1 000, puis entre 1 et 10 000, etc.

On le voit, une majorité de plus en plus importante de nombres ont pour point final le chiffre 0. Il semble même que la proportion d'entiers positifs inférieurs à N dont le point final est 0 tend progressivement vers 100 %. Pour le démontrer, on remarque que lorsqu'on prend au hasard un nombre de c chiffres, la probabilité qu'il ne comporte aucun 0 est $(9/10)^c$ (son deuxième chiffre n'est pas un 0 neuf fois sur dix ; de même pour le troisième chiffre, etc.). Cette probabilité tend vers 0 quand c tend vers l'infini.

Puisqu'un nombre qui comporte un 0 a une persistance égale à 1 et que ceux qui n'ont pas la persistance 1 ont une persistance majorée par $c + 2$ (voir plus haut), il s'ensuit que la persistance multiplicative moyenne d'un entier inférieur à N tend vers 1 quand N tend vers l'infini.

Malheureusement, le fait de savoir que cette moyenne est égale à 1 ne permet pas

de savoir si 11 est le maximum : la moyenne ne dit rien sur les écarts à la moyenne !

  propos des points finals d'une suite multiplicative, une autre question pourtant simple reste non r solv e. On remarque qu'entre 1 et 10^n , le point final 1 est obtenu n fois exactement (voir la colonne sous le 1). Cela provient de ce que le produit des chiffres d'un entier vaut 1 si et seulement si cet entier ne comporte que des 1, c'est-à-dire si c'est un nombre parmi 1, 11, 111, 1 111, 11 111, etc. Entre 1 et 10^n , il y a donc au moins n nombres dont le point final est 1 (d'ailleurs atteint en une seule étape).

Points finals et rep-units

Pour prouver qu'entre 1 et 10^n , il y a exactement n entiers ayant pour point final le 1, il suffit donc de prouver que les nombres de la forme 111...1, dénommés *rep-units*, ont toujours un autre diviseur premier que 2, 3, 5 ou 7. En effet, si un *rep-unit* A n'avait comme facteurs premiers que 2, 3, 5 et 7, alors il existerait un nombre B (celui ayant les facteurs premiers de A comme chiffres) qui ne serait pas un *rep-unit*, mais qui en donnerait un par multiplication de ses chiffres, et aurait donc 1 comme point final. Du coup, il y aurait toujours, entre 1 et 10^n , plus de n entiers ayant le point final 1 pour n assez grand.

Les *rep-units* ont été largement étudiés. Des pages Internet leur sont consacrées, mais rien ne permet d'affirmer que tous ont un facteur premier supérieur à 9. Ceux déjà factorisés ont tous un facteur premier supérieur à 9 (voir http://homepage2.nifty.com/m_kamada/math/11111.htm), mais qu'en est-il des autres ? Personne, à ma

Répartition des nombres entre 1 et 10^n en fonction de leur « point final »										
Point final	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Entre 1 et 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Entre 1 et 10^2	25	2	9	3	10	7	14	3	23	4
Entre 1 et 10^3	477	3	77	6	65	40	155	6	161	10
Entre 1 et 10^4	6 740	4	543	10	279	172	1 172	10	1 050	20
Entre 1 et 10^5	82 402	5	3 213	15	894	607	6 843	15	5 971	35

4. La variante de Paul Erdős



D'après Richard Guy, le mathématicien hongrois Paul Erdős a lui-même proposé une intéressante et très simple variante du problème de la persistance multiplicative. Trouvant peut-être trop facile la conjecture (pour- tant non résolue...) affirmant que la persistance multiplicative de tout nombre en base 10 est au plus 11, il a proposé que d'une étape à l'autre, on ne calcule que le produit des chiffres non nuls; par exemple, $4570 \rightarrow 140 \rightarrow 4$.

Cette « persistance à la Erdős » (toujours au moins égale à la persistance usuelle) est encore plus mal connue. W. Schneider a en effet découvert les nombres suivants qui ont une persistance à la Erdős supérieure à 11 :

(a) Le nombre $N = 5_{(16)}7_{(13)}$ (le 5 répété 16 fois, suivi du 7 répété 13 fois) a une persistance à la Erdős de 12 : $55\,555\,555\,555\,555\,557\,777\,777\,777\,777 \rightarrow 14\,784\,089\,722\,747\,802\,734\,375 \rightarrow 49\,962\,386\,718\,720 \rightarrow 438\,939\,648 \rightarrow 44\,789\,76 \rightarrow 338\,688 \rightarrow 276\,48 \rightarrow 2688 \rightarrow 768 \rightarrow 336 \rightarrow 54 \rightarrow 20 \rightarrow 2$.

(b) $7_{(42)}8_{(2)}9_{(14)}$ a une persistance à la Erdős de 13.

(c) $2_{(1)}6_{(1)}7_{(130)}9_{(8)}$ a une persistance à la Erdős égale à 14.

Wilfred Whiteside et Phil Carmody ont été jusqu'à 17 (voir www.primem-puzzles.net/puzzles/puzz_341.htm) :

(d) $6_{(1)}7_{(157)}8_{(46)}9_{(25)}$ a une persistance à la Erdős de 15.

(e) $3_{(1)}7_{(54)}8_{(82)}9_{(353)}$ a une persistance à la Erdős de 16.

(f) $3_{(1)}7_{(27)}8_{(622)}9_{(399)}$ a une persistance à la Erdős de 17.

Comment être certain qu'on ne trouvera pas mieux ? Et même, comment savoir qu'un maximum sera atteint ? Erdős n'a pas répondu, mais il a proposé la conjecture suivante : pour toute base de numération b , il existe une constante $p'(b)$ donnant le maximum possible pour la persistance à la Erdős des nombres écrits dans cette base. Cette variante de la conjecture est plus ardue que l'énoncé initial. Il n'est d'ailleurs pas si probable que cela qu'elle soit vraie, puisque, aujourd'hui, nul ne semble avoir identifié ce maximum indépassable dont elle annonce l'existence, même dans le cas de la base 10 !

connaissance, n'a prouvé que c'était vrai pour tous les *rep-units*. Il est donc possible que la colonne sous le 1 du tableau des points finals, prolongée indéfiniment, ne soit pas, comme elle semble l'être, la suite régulière des entiers 1, 2, 3, 4, ... C'est peut-être le cas, mais l'affirmer, c'est énoncer une conjecture !

Dans le tableau des points finals, F. De Comité a remarqué trois autres colonnes.

— La colonne sous le 3 et la colonne sous le 7 contiennent toujours les mêmes nombres : il s'agit des nombres triangulaires, de la forme $n(n-1)/2$, qu'on trouve sur la troisième colonne du triangle de Pascal : 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

— La colonne sous le 9 contient les nombres de la quatrième colonne du triangle de Pascal, de la forme $n(n-1)(n-2)/6$: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, ...

Comme pour la colonne sous le 1, il est assez facile de démontrer que les nombres trouvés dans ces colonnes doivent au moins avoir ces valeurs, mais il est parfaitement possible que cela cesse d'être vrai si l'on va assez loin dans le tableau. Comme précédemment, cela dépend de conjectures difficiles sur la factorisation des entiers en nombres premiers.

Le mathématicien se comporte souvent comme le célèbre ivrogne qui, la nuit, cherche ses clefs sous un lampadaire. On lui

demande : « Êtes-vous certain d'avoir perdu vos clefs sous ce lampadaire ? ». « Non, répond-il, mais ici il y a de la lumière. » Ne réussissant pas à résoudre le problème fondamental de la persistance multiplicative des nombres en base 10 (est-elle au plus 11 ?), les mathématiciens se sont intéressés aux variantes du problème, qu'ils ont parfois résolues parce qu'elles se trouvaient sous le lampadaire.

Et dans les autres bases ?

La première idée de variante consiste à considérer d'autres bases de numération.

En base 2, le problème est particulièrement facile. Un nombre écrit en base 2 ne comporte que des 1 et des 0. S'il comporte un 0, sa persistance multiplicative en base 2 est 1 (et son point final est 0). S'il n'en comporte pas, c'est qu'il n'est fait que de 1, et donc sa persistance multiplicative en base 2 est aussi égale à 1 (et son point final est 1). Ainsi, il n'y a aucun mystère en base 2 : 0 et 1 ont la persistance 0, et les autres entiers sont de persistance 1.

En base 3, c'est déjà plus intéressant. Un entier s'y écrit avec des 0, des 1 et des 2. S'il comporte un 0, sa persistance est 1 et son point final 0. Sinon, les 1 n'ont pas d'importance et le produit de ses chiffres est une puissance de 2.

Il se trouve que toutes les puissances de 2 écrites en base 3, à l'exception de 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 et 2^{15} , semblent contenir un 0, ce qui arrête la suite multiplicative.

Le test pour savoir si toute puissance de 2 en base 3 comporte un 0 a été mené jusqu'à 2^{10000} et aucune autre exception que les cinq mentionnées n'a été découverte. Cela ne constitue pas une preuve et il semble malheureusement que la conjecture « Toutes les puissances de 2 à partir de 2^{16} comportent un 0 dans leur écriture en base 3 » soit difficile.

Domage, car si l'on admet cette conjecture, le problème de la persistance en base 3 est résolu :

(a) Si N comporte un 0, sa persistance multiplicative en base 3 est 1.

(b) Si N ne comporte que des 1, sa persistance multiplicative en base 3 est 1.

(c) Si $N = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ ou 2^{15} , le calcul donne pour la persistance p (les indices désignent la base de numération utilisée) :

$2^1 = 2$, $p = 0$; $2^2 = 12_3 \rightarrow 2$, $p = 1$; $2^3 = 22_3 \rightarrow 11_3 \rightarrow 1$, $p = 2$; $2^4 = 121_3 \rightarrow 2$, $p = 1$; $2^{15} = 221122221_3 \rightarrow 1012_3 \rightarrow 0$, $p = 2$.

(d) Si N comporte uniquement des 1 et des 2 avec 1, 2, 3, 4 ou 15 fois le 2, on est ramené en une étape au cas (c). La persistance est alors 1, 2, 3, 2, 3 selon le cas. Par exemple, $1121122_3 \rightarrow 22_3 \rightarrow 11_3 \rightarrow 1$.

(e) Si N ne comporte que des 1 et des 2