

4. La variante de Paul Erdős

D'après Richard Guy, le mathématicien hongrois Paul Erdős a lui-même proposé une intéressante et très simple variante du problème de la persistance multiplicative. Trouvant peut-être trop facile la conjecture (pourtant non résolue...) affirmant que la persistance multiplicative de tout nombre en base 10 est au plus 11, il a proposé que d'une étape à l'autre, on ne calcule que le produit des chiffres non nuls; par exemple, $4570 \rightarrow 140 \rightarrow 4$.

Cette « persistance à la Erdős » (toujours au moins égale à la persistance usuelle) est encore plus mal connue. W. Schneider a en effet découvert les nombres suivants qui ont une persistance à la Erdős supérieure à 11 :

(a) Le nombre $N = 5_{(16)}7_{(13)}$ (le 5 répété 16 fois, suivi du 7 répété 13 fois) a une persistance à la Erdős de 12 : $555555555555557777777777777 \rightarrow 14784089722747802734375 \rightarrow 49962386718720 \rightarrow 438939648 \rightarrow 4478976 \rightarrow 338688 \rightarrow 27648 \rightarrow 2688 \rightarrow 768 \rightarrow 336 \rightarrow 54 \rightarrow 20 \rightarrow 2$.

(b) $7_{(42)}8_{(2)}9_{(14)}$ a une persistance à la Erdős de 13.

(c) $2_{(1)}6_{(1)}7_{(130)}9_{(8)}$ a une persistance à la Erdős égale à 14. Wilfred Whiteside et Phil Carmody ont été jusqu'à 17 (voir www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_341.htm) :

(d) $6_{(1)}7_{(157)}8_{(46)}9_{(25)}$ a une persistance à la Erdős de 15.

(e) $3_{(1)}7_{(54)}8_{(82)}9_{(353)}$ a une persistance à la Erdős de 16.

(f) $3_{(1)}7_{(27)}8_{(622)}9_{(399)}$ a une persistance à la Erdős de 17.

Comment être certain qu'on ne trouvera pas mieux ? Et même, comment savoir qu'un maximum sera atteint ? Erdős n'a pas répondu, mais il a proposé la conjecture suivante : pour toute base de numération b , il existe une constante $p'(b)$ donnant le maximum possible pour la persistance à la Erdős des nombres écrits dans cette base. Cette variante de la conjecture est plus ardue que l'énoncé initial. Il n'est d'ailleurs pas si probable que cela qu'elle soit vraie, puisque, aujourd'hui, nul ne semble avoir identifié ce maximum indépassable dont elle annonce l'existence, même dans le cas de la base 10 !



connaissance, n'a prouvé que c'était vrai pour tous les *rep-units*. Il est donc possible que la colonne sous le 1 du tableau des points finals, prolongée indéfiniment, ne soit pas, comme elle semble l'être, la suite régulière des entiers 1, 2, 3, 4, ... C'est peut-être le cas, mais l'affirmer, c'est énoncer une conjecture !

Dans le tableau des points finals, F. De Comité a remarqué trois autres colonnes.

— La colonne sous le 3 et la colonne sous le 7 contiennent toujours les mêmes nombres : il s'agit des nombres triangulaires, de la forme $n(n-1)/2$, qu'on trouve sur la troisième colonne du triangle de Pascal : 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

— La colonne sous le 9 contient les nombres de la quatrième colonne du triangle de Pascal, de la forme $n(n-1)(n-2)/6$: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, ...

Comme pour la colonne sous le 1, il est assez facile de démontrer que les nombres trouvés dans ces colonnes doivent au moins avoir ces valeurs, mais il est parfaitement possible que cela cesse d'être vrai si l'on va assez loin dans le tableau. Comme précédemment, cela dépend de conjectures difficiles sur la factorisation des entiers en nombres premiers.

Le mathématicien se comporte souvent comme le célèbre ivrogne qui, la nuit, cherche ses clefs sous un lampadaire. On lui

demande : « Êtes-vous certain d'avoir perdu vos clefs sous ce lampadaire ? ». « Non, répond-il, mais ici il y a de la lumière. » Ne réussissant pas à résoudre le problème fondamental de la persistance multiplicative des nombres en base 10 (est-elle au plus 11 ?), les mathématiciens se sont intéressés aux variantes du problème, qu'ils ont parfois résolues parce qu'elles se trouvaient sous le lampadaire.

Et dans les autres bases ?

La première idée de variante consiste à considérer d'autres bases de numération.

En base 2, le problème est particulièrement facile. Un nombre écrit en base 2 ne comporte que des 1 et des 0. S'il comporte un 0, sa persistance multiplicative en base 2 est 1 (et son point final est 0). S'il n'en comporte pas, c'est qu'il n'est fait que de 1, et donc sa persistance multiplicative en base 2 est aussi égale à 1 (et son point final est 1). Ainsi, il n'y a aucun mystère en base 2 : 0 et 1 ont la persistance 0, et les autres entiers sont de persistance 1.

En base 3, c'est déjà plus intéressant. Un entier s'y écrit avec des 0, des 1 et des 2. S'il comporte un 0, sa persistance est 1 et son point final 0. Sinon, les 1 n'ont pas d'importance et le produit de ses chiffres est une puissance de 2.

Il se trouve que toutes les puissances de 2 écrites en base 3, à l'exception de 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 et 2^{15} , semblent contenir un 0, ce qui arrête la suite multiplicative.

Le test pour savoir si toute puissance de 2 en base 3 comporte un 0 a été mené jusqu'à 2^{10000} et aucune autre exception que les cinq mentionnées n'a été découverte. Cela ne constitue pas une preuve et il semble malheureusement que la conjecture « Toutes les puissances de 2 à partir de 2^{16} comportent un 0 dans leur écriture en base 3 » soit difficile.

Domage, car si l'on admet cette conjecture, le problème de la persistance en base 3 est résolu :

(a) Si N comporte un 0, sa persistance multiplicative en base 3 est 1.

(b) Si N ne comporte que des 1, sa persistance multiplicative en base 3 est 1.

(c) Si $N = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ ou 2^{15} , le calcul donne pour la persistance p (les indices désignent la base de numération utilisée) :

$2^1 = 2$, $p = 0$; $2^2 = 12_3 \rightarrow 2$, $p = 1$; $2^3 = 22_3 \rightarrow 41_3 \rightarrow 1$, $p = 2$; $2^4 = 121_3 \rightarrow 2$, $p = 1$; $2^{15} = 221122221_3 \rightarrow 1012_3 \rightarrow 0$, $p = 2$.

(d) Si N comporte uniquement des 1 et des 2 avec 1, 2, 3, 4 ou 15 fois le 2, on est ramené en une étape au cas (c). La persistance est alors 1, 2, 3, 2, 3 selon le cas. Par exemple, $1121122_3 \rightarrow 22_3 \rightarrow 11_3 \rightarrow 1$.

(e) Si N ne comporte que des 1 et des 2

et que le nombre de 2 n'est pas 1, 2, 3, 4 ou 15, alors (sous réserve de la conjecture concernant les puissances de 2) la persistance est 2, puisque N donne un nombre comportant un 0, qui donne 0 à l'étape de calcul suivante.

La persistance multiplicative maximale en base 3 serait donc 3, et le plus petit nombre ayant cette persistance serait $26_{10} = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$ qui, en base 3, donne la suite multiplicative $26 = 222_3 \rightarrow 22_3 \rightarrow 11_3 \rightarrow 1$.

Des propriétés sont connues pour les autres bases, mais aucune n'élucide la question de la persistance maximale.

Des bases à pas variable

Les bases de numération à pas variable conduisent à des cas où le problème de la persistance multiplicative est complètement résolu : enfin, un bon lampadaire !

En base 10, la suite de chiffres 322201 représente le nombre :

$3 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10 + 1$. Dans la base à pas variable $B = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, 322201 représente l'entier :

$3 \times b_5 \times b_4 \times b_3 \times b_2 \times b_1 + 2 \times b_4 \times b_3 \times b_2 \times b_1 + 2 \times b_3 \times b_2 \times b_1 + 2 \times b_2 \times b_1 + 0 \times b_1 + 1$.

Si chaque b_i est supérieur ou égal à 2, tout entier a au moins une écriture en base B . Si, de plus, on impose au chiffre placé en i -ème position à partir de la droite d'être strictement inférieur à b_i , l'écriture en base B d'un entier est unique. On impose donc cette condition aux chiffres d'un nombre écrit en base B .

Les bases à pas variable sont la généralisation naturelle de la notion de base de numération à pas constant. Elles permettent en particulier de rendre compte simplement des systèmes de mesure inégaux : 1 écu = 3 livres ; 1 livre = 20 sous ; 1 sou = 12 deniers.

La base de numération « factorielle » est particulièrement prisée des mathématiciens ; elle consiste à prendre $b_i = i + 1$. Ainsi, en base factorielle, le nombre s'écrivant 322201_F (l'indice F signifie qu'il s'agit de l'écriture en base factorielle) vaut : $3 \times 6! + 2 \times 5! + 2 \times 4! + 2 \times 3! + 0 \times 2! + 1 = 3 \times 720 + 2 \times 120 + 2 \times 24 + 2 \times 6 + 0 \times 2 + 1 = 2461_{10}$.

Bien évidemment, la notion de persistance a un sens en base factorielle : pour passer d'un entier N au suivant dans la suite multiplicative, on fait le produit des chiffres de son écriture en base factorielle, et on écrit le résultat en base factorielle. La conjecture généralisée de la persistance en base factorielle est bien évidemment qu'il existe une persistance maximale p_{Fmax} .

M. Diamond et Daniel Reidpath ont montré que cette conjecture en base factorielle est fautive. Leur méthode vaut aussi pour la « persistance à la Erdős » (on ne multiplie que les chiffres non nuls), qui, en base factorielle, est elle aussi résolue par la négative.

Voici le raisonnement de M. Diamond et D. Reidpath. En base 10, les chiffres utilisables sont 0, 1, ..., 9. En base factorielle, les chiffres utilisables pour le n -ième chiffre à partir de la droite sont les nombres de 0 à n (le chiffre le plus à droite est un 0 ou un 1, à côté c'est un 0, un 1 ou un 2, etc.).

De cette remarque, il s'ensuit que tout nombre N a un antécédent M (un nombre M dont le produit des chiffres de l'écriture en base factorielle est N) ne comportant aucun 0. C'est le nombre $M = N11\dots1_F$ avec $(N-1)$ fois le 1, qui est bien une écriture correcte d'un nombre dans la base factorielle, puisque son N -ième chiffre à partir de la droite est compris entre 0 et N . Si tout nombre a un antécédent, il ne peut y avoir de maximum à la persistance en base factorielle : on part de $A_1 = 11_F = 3_{10}$ (dont la persistance est 1), on considère son antécédent $A_2 = 311_F$, puis l'antécédent A_3 de A_2 , etc. Par construction, le nombre A_N possède la persistance N . Il n'y a pas de persistance maximale.

En fait, la méthode décrite fonctionne pour toutes les bases à pas variable où les pas b_i ne sont pas bornés. Cela suggère une nouvelle et dernière conjecture (plus difficile que toutes les autres !) que je propose ici pour la première fois :

— Pour toute base à pas variable dont les b_i sont bornés par une constante, la persistance multiplicative (simple ou à la Erdős) est elle aussi bornée.

Il est peu probable que nous soyons là sous un lampadaire !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Persistence of a number, Wikipedia, 2013 : http://en.wikipedia.org/wiki/Persistence_of_a_number

E. Weisstein, Multiplicative Persistence, 2013 : <http://mathworld.wolfram.com/MultiplicativePersistence.html>

C. Rivera, Problems & Puzzles, www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_022.htm et www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_341.htm

N. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2013 : <http://oeis.org/search?q=persistence&language=french&go=Chercher>

M. R. Diamond, Multiplicative persistence base 10 : Some new null results, 2011 : www.markdiamond.com.au/download/joos-3-1-1.pdf

A. Bellos, Here's Looking at Euclid : A Surprising Excursion Through the Astonishing World of Math, Free Press, 2010 (p. 176).

M. R. Diamond et D. Reidpath, A counterexample to a conjecture of Sloane and Erdős, J. Recreational Math., vol. 29(2), pp. 89-92, 1998.