

et que le nombre de 2 n'est pas 1, 2, 3, 4 ou 15, alors (sous réserve de la conjecture concernant les puissances de 2) la persistance est 2, puisque N donne un nombre comportant un 0, qui donne 0 à l'étape de calcul suivante.

La persistance multiplicative maximale en base 3 serait donc 3, et le plus petit nombre ayant cette persistance serait $26_{10} = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$ qui, en base 3, donne la suite multiplicative $26 = 222_3 \rightarrow 22_3 \rightarrow 11_3 \rightarrow 1$.

Des propriétés sont connues pour les autres bases, mais aucune n'élucide la question de la persistance maximale.

Des bases à pas variable

Les bases de numération à pas variable conduisent à des cas où le problème de la persistance multiplicative est complètement résolu : enfin, un bon lampadaire !

En base 10, la suite de chiffres 322201 représente le nombre :

$3 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10 + 1$. Dans la base à pas variable $B = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, 322201 représente l'entier :

$3 \times b_5 \times b_4 \times b_3 \times b_2 \times b_1 + 2 \times b_4 \times b_3 \times b_2 \times b_1 + 2 \times b_3 \times b_2 \times b_1 + 2 \times b_2 \times b_1 + 0 \times b_1 + 1$.

Si chaque b_i est supérieur ou égal à 2, tout entier a au moins une écriture en base B . Si, de plus, on impose au chiffre placé en i -ème position à partir de la droite d'être strictement inférieur à b_i , l'écriture en base B d'un entier est unique. On impose donc cette condition aux chiffres d'un nombre écrit en base B .

Les bases à pas variable sont la généralisation naturelle de la notion de base de numération à pas constant. Elles permettent en particulier de rendre compte simplement des systèmes de mesure inégaux : 1 écu = 3 livres ; 1 livre = 20 sous ; 1 sou = 12 deniers.

La base de numération « factorielle » est particulièrement prisée des mathématiciens ; elle consiste à prendre $b_i = i + 1$. Ainsi, en base factorielle, le nombre s'écrivant 322201_F (l'indice F signifie qu'il s'agit de l'écriture en base factorielle) vaut : $3 \times 6! + 2 \times 5! + 2 \times 4! + 2 \times 3! + 0 \times 2! + 1 = 3 \times 720 + 2 \times 120 + 2 \times 24 + 2 \times 6 + 0 \times 2 + 1 = 2461_{10}$.

Bien évidemment, la notion de persistance a un sens en base factorielle : pour passer d'un entier N au suivant dans la suite multiplicative, on fait le produit des chiffres de son écriture en base factorielle, et on écrit le résultat en base factorielle. La conjecture généralisée de la persistance en base factorielle est bien évidemment qu'il existe une persistance maximale p_{Fmax} .

M. Diamond et Daniel Reidpath ont montré que cette conjecture en base factorielle est fautive. Leur méthode vaut aussi pour la « persistance à la Erdős » (on ne multiplie que les chiffres non nuls), qui, en base factorielle, est elle aussi résolue par la négative.

Voici le raisonnement de M. Diamond et D. Reidpath. En base 10, les chiffres utilisables sont 0, 1, ..., 9. En base factorielle, les chiffres utilisables pour le n -ième chiffre à partir de la droite sont les nombres de 0 à n (le chiffre le plus à droite est un 0 ou un 1, à côté c'est un 0, un 1 ou un 2, etc.).

De cette remarque, il s'ensuit que tout nombre N a un antécédent M (un nombre M dont le produit des chiffres de l'écriture en base factorielle est N) ne comportant aucun 0. C'est le nombre $M = N11\dots1_F$ avec $(N-1)$ fois le 1, qui est bien une écriture correcte d'un nombre dans la base factorielle, puisque son N -ième chiffre à partir de la droite est compris entre 0 et N . Si tout nombre a un antécédent, il ne peut y avoir de maximum à la persistance en base factorielle : on part de $A_1 = 11_F = 3_{10}$ (dont la persistance est 1), on considère son antécédent $A_2 = 311_F$, puis l'antécédent A_3 de A_2 , etc. Par construction, le nombre A_N possède la persistance N . Il n'y a pas de persistance maximale.

En fait, la méthode décrite fonctionne pour toutes les bases à pas variable où les pas b_i ne sont pas bornés. Cela suggère une nouvelle et dernière conjecture (plus difficile que toutes les autres !) que je propose ici pour la première fois :

— Pour toute base à pas variable dont les b_i sont bornés par une constante, la persistance multiplicative (simple ou à la Erdős) est elle aussi bornée.

Il est peu probable que nous soyons là sous un lampadaire !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Persistence of a number, *Wikipedia*, 2013 : http://en.wikipedia.org/wiki/Persistence_of_a_number

E. Weisstein, *Multiplicative Persistence*, 2013 : <http://mathworld.wolfram.com/MultiplicativePersistence.html>

C. Rivera, *Problems & Puzzles*, www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_022.htm et www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_341.htm

N. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, 2013 : <http://oeis.org/search?q=persistence&language=french&go=Chercher>

M. R. Diamond, *Multiplicative persistence base 10 : Some new null results*, 2011 : www.markdiamond.com.au/download/joos-3-1-1.pdf

A. Bellos, *Here's Looking at Euclid : A Surprising Excursion Through the Astonishing World of Math*, Free Press, 2010 (p. 176).

M. R. Diamond et D. Reidpath, *A counterexample to a conjecture of Sloane and Erdős*, *J. Recreational Math.*, vol. 29(2), pp. 89-92, 1998.

SCIENCE & FICTION

Armures à toute épreuve

Les armures qui protègent les héros de science-fiction sont inspirées des carapaces et autres protections dont sont équipées diverses espèces, tant animales que végétales.

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Les armures de la science-fiction sont nombreuses et rivalisent d'ingéniosité ; de l'armure d'Iron Man à la combinaison pare-balles de Batman, en passant par les carapaces d'insectoïdes géants, elles sont souvent inspirées de structures naturelles ou des dernières innovations techniques. À quoi servent-elles ? Protègent-elles parfaitement ceux qui les portent ?

La fonction première d'une armure ou d'une carapace est de protéger contre les coups portés par un éventuel agresseur. Que ce soit une armure ou un gilet pare-balles, ils servent à dissiper l'essentiel de l'énergie d'un choc dû à une épée ou une balle, de sorte que l'impact ne cause pas de graves dégâts. Cela implique bien sûr des contraintes de composition et de poids : l'armure métallique d'Iron Man, par exemple, arrête les balles, mais doit, par conséquent, être épaisse.

Sachant qu'une balle tirée à bonne distance peut s'enfoncer de plusieurs centimètres dans le métal, protéger ne serait-ce que le torse de Tony Stark, son porteur, nécessiterait de porter une plaque métallique pesant plus de 100 kilogrammes ! On comprend mieux pourquoi Iron Man a une armure motorisée. Notons que cette armure n'est pas constituée que de fer, contrairement à ce que suggère le nom du superhéros, mais qu'elle est faite d'un alliage métallique dont seul Stark a le secret. Son prototype fut confectionné en secret, au fond d'une prison et à partir de métaux recyclés.

Le concepteur d'Iron Man s'est-il inspiré d'une espèce naturelle ? Ce recyclage d'armure évoque le bernard-l'hermite, crustacé qui s'abrite dans des coquilles de mollusques

abandonnées par leurs précédents locataires. Dans le monde vivant, les carapaces, armures et autres coquilles sont variées. Sélectionnées par les mécanismes de l'évolution, elles protègent leurs occupants contre les dents, griffes ou pinces des éventuels prédateurs. Si elle recouvre tout le corps, l'armure est souvent articulée pour assurer une certaine mobilité. Mais les articulations deviennent rapidement des points faibles : c'est ce que les fourmis attaquent en premier lorsqu'un insecte plus gros s'aventure trop près de la fourmilière.

Carapace articulée ou d'un seul bloc ?

Les arthropodes (insectes, mais aussi crustacés, araignées, scorpions, etc.) portent une carapace qui a beaucoup inspiré la science-fiction au cinéma, de *Starship Troopers* à *District 9*. Elle est composée de chitine, dont il faut souligner que c'est le polymère le plus produit dans le monde vivant après la cellulose. Cette carapace, dérivée du squelette externe, ou exosquelette, est constituée de plaques articulées, stratégie de défense passive qui se retrouve aussi chez de nombreux vertébrés, des « poissons » cuirassés du Paléozoïque (les placodermes) aux tatous ou pangolins actuels, en passant par les dinosaures stégosaures ou ankylosaures, par exemple.

Chez ces animaux, les plaques osseuses (qualifiées d'ostéodermes) se forment dans le derme et sont composées de carbonate de calcium et de kératine. Mais comme le montrent certaines tortues, toutes les carapaces ne sont pas forcément articulées : elles



1. LA CARAPACE D'IRON MAN est constituée de plaques d'un alliage dont seul le héros a le secret. C'est une armure articulée et même motorisée étant donné son poids !



2. L'ARMURE DES AMMONITES, des céphalopodes fossiles cousins du Nautilé, présentait des cloisons intérieures qui permettaient vraisemblablement à l'animal de résister à la pression régnant aux grandes profondeurs.

peuvent aussi protéger le corps en formant un seul bloc. La stratégie de la « formation de la tortue » était d'ailleurs pratiquée par des légionnaires romains qui se regroupaient sous leurs boucliers. En science-fiction, le crâne de Predator présente une sorte de casque ressemblant à une carapace de tortue. Dans *l'Heroic Fantasy*, les meilleures armures et boucliers sont faits d'écailles de dragon qui ressemblent à des ostéodermes.

En termes de résistance aux chocs et autres agressions extérieures (jet d'acides, chute de pierres, etc.), les plantes supplantent les animaux. La coque de certains fruits ou graines est composée de lignine, autre polymère ultrarésistant : broyée, elle est utilisée comme abrasif en aéronautique et entre même dans la composition de résines ignifuges qui protègent les navettes spatiales. Mieux encore, spores et pollens, transportés sur de très longues distances, ainsi que certaines algues, sont dotés d'une paroi de sporopollénine : ce composé organique (un corps gras dont on ignore encore la composition exacte) résiste à la chaleur, au froid, à la pression et à la plupart des attaques chimiques ! La carapace d'Alien, qui contient un « sang » jaunâtre hypercorrosif, est-elle faite de sporopollénine ?

En matière de dureté (mais aussi de fragilité), la silice (qui compose le verre)

est utilisée, tant chez les éponges pour leur squelette interne (des aiguilles nommées spicules) que chez des algues (les diatomées), pour leur paroi externe. Si la nature et la composition des armures varient selon les espèces et les milieux, les techniques de construction sont elles aussi hétéroclites : secrétées par l'organisme ou « maçonnées » (les larves des phryganes, des insectes, construisent de petits fourreaux de boue dans lesquels elles se métamorphosent), certaines protections sont extraites de l'environnement (plusieurs ethnies africaines ont utilisé de la peau de rhinocéros pour en faire des boucliers).

Résister à la pression, au chaud, au froid... à tout !

Une solution pour se protéger consiste aussi à changer de forme. C'est ce que font de nombreux champignons, animaux et plantes qui s'enkystent : lorsque les conditions de vie deviennent trop difficiles, ces organismes s'entourent d'une coque résistante, leurs fonctions vitales s'arrêtent et ils entrent dans un état de dormance – la cryptobiose. C'est le cas des tardigrades, de microscopiques « oursons d'eau » cousins des arthropodes, qui sont capables de supporter des conditions

extrêmes de température, de pression, de rayonnement ou de toxicité. Ils survivent même à une exposition au vide spatial ! Les artémies sont des crustacés également connus pour leurs kystes, capables de résister à ces conditions extrêmes pendant plusieurs années. Quand les conditions de vie redeviennent favorables, ces arthropodes se transforment en petites larves et reviennent à la vie.

Ainsi, totale, partielle ou temporaire, l'armure idéale consiste en un compromis entre poids, résistance et souplesse. La combinaison de Spiderman intègre-t-elle de la soie d'araignée élastique et robuste ? Celle de Batman est-elle, comme les gilets pare-balles, formée d'une couche de céramique enveloppant un tissage de fibres synthétiques de type kevlar ? Cette couche externe très résistante ralentit les balles qui finissent leur course dans la toile de fibres imbriquées, le poids ne dépassant pas huit kilogrammes. Encore plus efficace que l'armure d'Iron Man ! ■

J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay.

Retrouvez les articles de J.-S. Steyer et R. Lehoucq sur www.pourlascience.fr