

Les 14 classes connues de pavés convexes pentagonaux

Les pentagones convexes (par définition, une forme est convexe si le segment joignant deux de ses points ne sort jamais de F) pouvant paver parfaitement le plan semblent se ranger en 14 classes. Chaque classe est définie par des

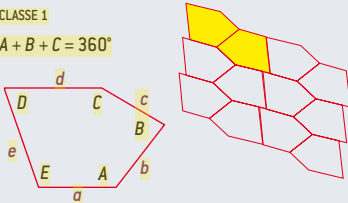
relations entre les angles et entre les longueurs des côtés. Certains pentagones appartiennent à plusieurs classes à la fois, ce qui implique qu'ils donnent plusieurs pavages différents du plan. Ces 14 classes n'ont été trouvées que

très progressivement : cinq en 1918, trois en 1968, une en 1975, quatre entre 1975 et 1984, puis enfin une en 1985. À chaque étape de ce lent processus de découverte, on a pensé que l'énumération était complète. C'est encore le cas aujourd'hui, et

la communauté mathématique attend une preuve soignée pour éviter de répéter les annonces erronées du passé. Malgré des recherches approfondies, la preuve que la liste des 14 classes est complète manque toujours.

CLASSE 1

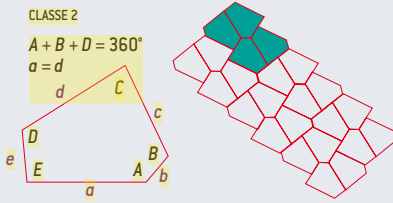
$$A + B + C = 360^\circ$$



CLASSE 2

$$A + B + D = 360^\circ$$

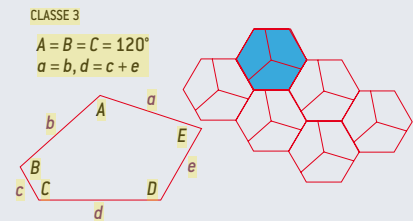
$$a = d$$



CLASSE 3

$$A = B = C = 120^\circ$$

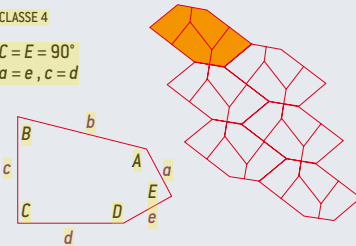
$$a = b, d = c + e$$



CLASSE 4

$$C = E = 90^\circ$$

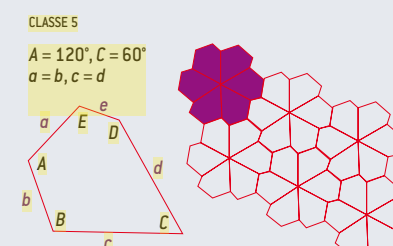
$$a = e, c = d$$



CLASSE 5

$$A = 120^\circ, C = 60^\circ$$

$$a = b, c = d$$

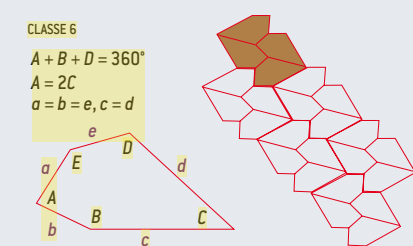


CLASSE 6

$$A + B + D = 360^\circ$$

$$A = 2C$$

$$a = b = e, c = d$$

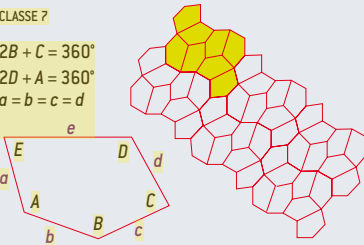


CLASSE 7

$$2B + C = 360^\circ$$

$$2D + A = 360^\circ$$

$$a = b = c = d$$

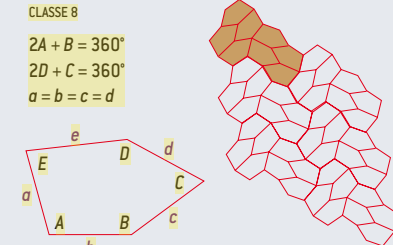


CLASSE 8

$$2A + B = 360^\circ$$

$$2D + C = 360^\circ$$

$$a = b = c = d$$

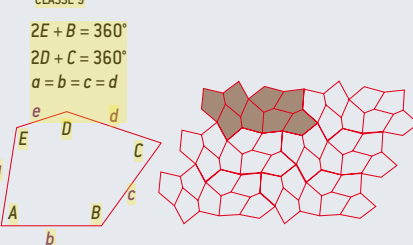


CLASSE 9

$$2E + B = 360^\circ$$

$$2D + C = 360^\circ$$

$$a = b = c = d$$



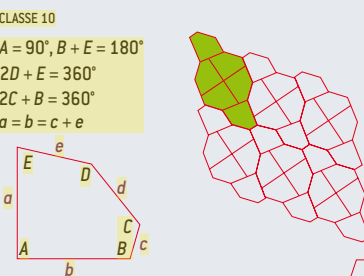
CLASSE 10

$$A = 90^\circ, B + E = 180^\circ$$

$$2D + E = 360^\circ$$

$$2C + B = 360^\circ$$

$$a = b = c + e$$

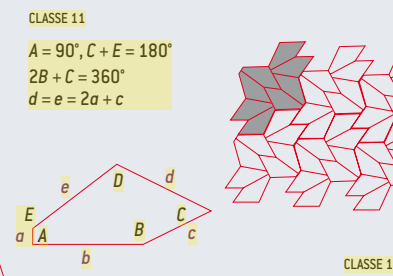


CLASSE 11

$$A = 90^\circ, C + E = 180^\circ$$

$$2B + C = 360^\circ$$

$$d = e = 2a + c$$

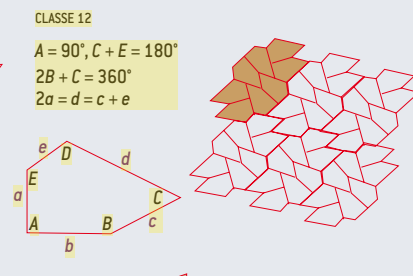


CLASSE 12

$$A = 90^\circ, C + E = 180^\circ$$

$$2B + C = 360^\circ$$

$$2a = d = c + e$$

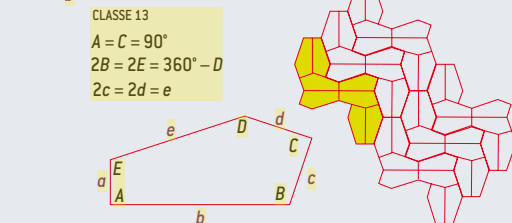


CLASSE 13

$$A = C = 90^\circ$$

$$2B = 2E = 360^\circ - D$$

$$2c = 2d = e$$



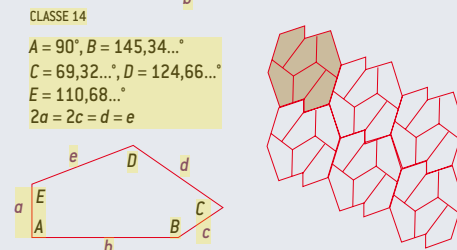
CLASSE 14

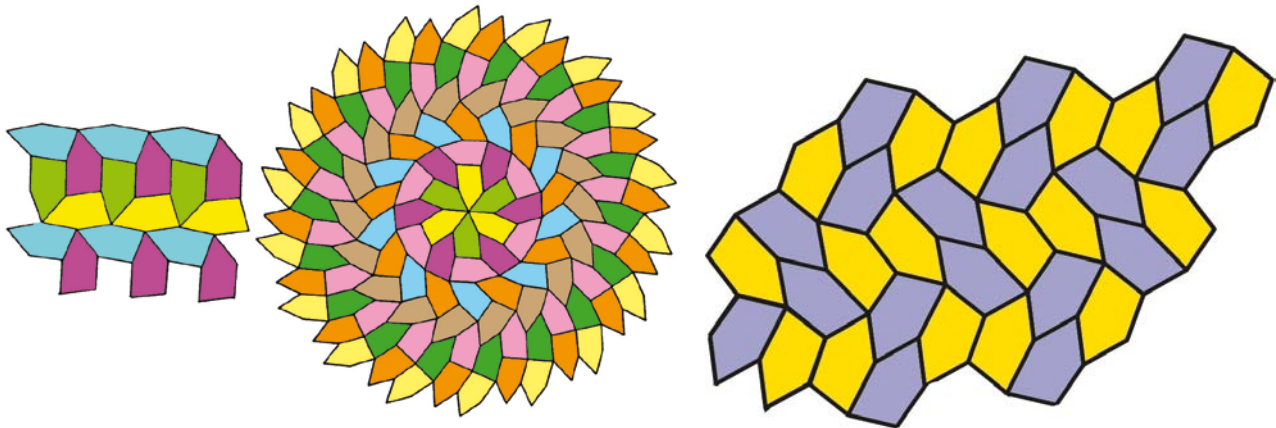
$$A = 90^\circ, B = 145,34\dots^\circ$$

$$C = 69,32\dots^\circ, D = 124,66\dots^\circ$$

$$E = 110,68\dots^\circ$$

$$2a = 2c = d = e$$





2. L'UNIQUE PENTAGONE dont les angles vérifient les relations $A + 2B = C + 2E = A + C + 2D = 360^\circ$ permet de construire plusieurs pavages différents, périodiques (comme ci-dessus à gauche) ou non (comme ci-dessus à droite).

3. DANS CE PAVAGE, tous les pavés pentagonaux mauves ont un même positionnement relatif, et il en est de même pour les pavés jaunes, mais les mauves n'ont pas le même positionnement que les jaunes. Ce pavage est dit 2-isoédrique.

— Quels sont tous les pavages du plan réalisables avec les pavés pentagonaux convexes convenables (un même pavé conduit parfois à plusieurs pavages très différents) ?

— Quels sont les pavages du plan par des pentagones convexes d'aire unité les plus économiques, c'est-à-dire ayant un périmètre aussi petit que possible ?

Aucun de ces problèmes n'est facile. Si beaucoup de résultats produisant de magnifiques figures géométriques sont connus, plusieurs n'ont été obtenus que récemment et nombreuses sont les belles énigmes qui persistent en 2013.

Erreur sur erreur !

Les mathématiciens sont têtus et sont parfois si persuadés qu'un problème est facile qu'ils croient disposer d'une solution, le disent et l'écrivent, et se trompent obstinément plusieurs fois de suite. Le problème des pavés convexes pentagonaux convenables est un exemple de cette suffisance.

En 1918, dans sa thèse soutenue à l'Université de Francfort, en Allemagne, Karl Reinhardt présente cinq classes de pentagones convexes qui pavent le plan (classes 1 à 5 de l'encadré page 79) et laisse entendre que prouver qu'il n'en existe pas d'autres est un travail fastidieux, mais facile. Pendant 50 ans, la communauté mathématique reste donc persuadée que le problème est résolu et sans intérêt.

Cependant, en 1968, Richard Kershner, de l'Université Johns Hopkins à Baltimore,

reprend l'étude plus soigneusement. Il découvre trois nouvelles classes de pentagones convexes qui pavent le plan (classes 6, 7, 8). Il écrit que c'est le manque de place qui l'empêche de détailler la preuve que les cinq classes précédentes et les trois qu'il vient de découvrir constituent la liste complète des pentagones convexes pavant le plan.

Quand, en juillet 1975, Martin Gardner présente les résultats de Kershner dans sa rubrique de jeux mathématiques du *Scientific American*, il reçoit une lettre de Richard James, informaticien californien, lui proposant une nouvelle classe (classe 10) qui montre que Kershner, comme Reinhardt avant lui, s'est trompé en croyant disposer d'une liste exhaustive.

Le plus étonnant reste à venir. L'Américaine Marjorie Rice (voir l'encadré page ci-contre), mère au foyer qui lisait le magazine de son fils, y voit l'article de Gardner relatant la découverte de R. James. Elle se met à chercher seule de nouveaux pentagones convexes pavant le plan. M. Rice ne possède aucune formation particulière en mathématiques, mais son esprit systématique et un travail minutieux mené à l'aide de petits dessins la font découvrir quatre nouvelles classes oubliées par les professionnels (les classes 9, 11, 12 et 13).

En 1985, une nouvelle classe est découverte (classe 14) par Rolf Stein, de l'Université de Dortmund. Il soutient qu'avec cette quatorzième classe, il complète définitivement l'énumération... avant qu'on découvre que sa démonstration d'exhaustivité est

fausse. Personne depuis n'a osé avancer une démonstration...

La question de savoir si ces 14 classes sont les seules n'est pas résolue depuis plus de 25 ans : ce qui semblait un problème facile est maintenant considéré comme un défi sérieux.

En 2012, le mathématicien japonais Teruhisa Sugimoto a réussi, en même temps que la mathématicienne russe Olga Bagina, à prouver qu'il existe huit classes, pas plus, de pentagones convexes convenant à des pavages « côté-contre-côté », c'est-à-dire où deux pentagones en contact se touchent soit uniquement par un sommet, soit par un côté complet pour chacun.

Ces huit classes sont celles numérotées 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans l'encadré. Les classes 3, 10, 11, 12, 13, 14 ne donnent jamais de pavages côté-contre-côté. Dans le cas de la classe 1, pour avoir des pavages côté-contre-côté, il faut ajouter la contrainte $a = d$; pour la classe 2, il faut ajouter $c = e$; tous les pentagones des classes 4 à 9 produisent des pavages côté-contre-côté sans conditions complémentaires.

Pavés équilatéraux

Un autre théorème a fait avancer nos connaissances sur les pavages pentagonaux convexes. Démontré (avec l'aide d'un ordinateur) en 1985 par Michael Hirschhorn et David Hunt, puis simplifié en 2004 par O. Bagina, le théorème stipule qu'un pentagone équilatéral pave le plan si et seulement