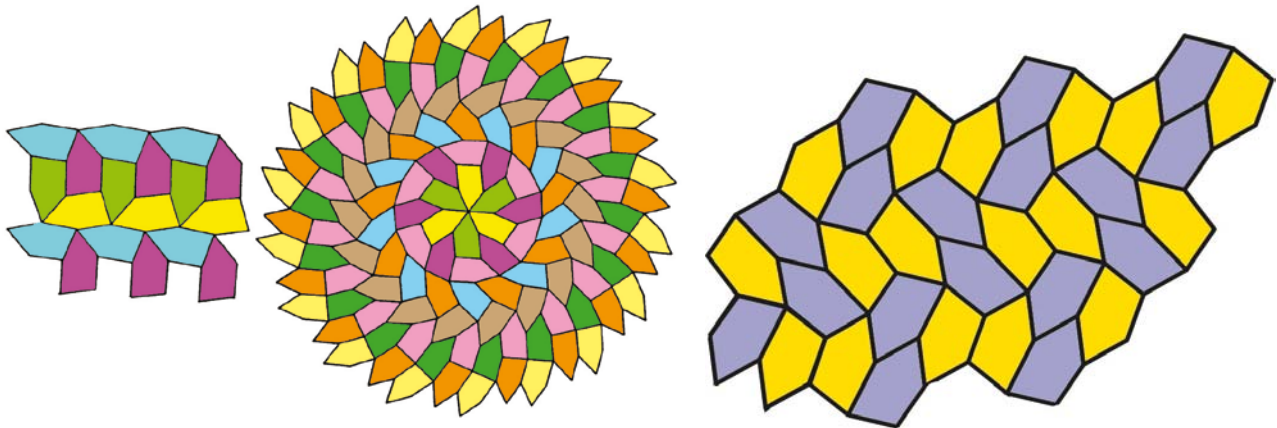




2. L'UNIQUE PENTAGONE dont les angles vérifient les relations $A + 2B = C + 2E = A + C + 2D = 360^\circ$ permet de construire plusieurs pavages différents, périodiques (comme ci-dessus à gauche) ou non (comme ci-dessus à droite).

3. DANS CE PAVAGE, tous les pavés pentagonaux mauves ont un même positionnement relatif, et il en est de même pour les pavés jaunes, mais les mauves n'ont pas le même positionnement que les jaunes. Ce pavage est dit 2-isoédrique.

– Quels sont tous les pavages du plan réalisables avec les pavés pentagonaux convexes convenables (un même pavé conduit parfois à plusieurs pavages très différents) ?

– Quels sont les pavages du plan par des pentagones convexes d'aire unité les plus économiques, c'est-à-dire ayant un périmètre aussi petit que possible ?

Aucun de ces problèmes n'est facile. Si beaucoup de résultats produisant de magnifiques figures géométriques sont connus, plusieurs n'ont été obtenus que récemment et nombreuses sont les belles énigmes qui persistent en 2013.

Erreur sur erreur !

Les mathématiciens sont têtus et sont parfois si persuadés qu'un problème est facile qu'ils croient disposer d'une solution, le disent et l'écrivent, et se trompent obstinément plusieurs fois de suite. Le problème des pavés convexes pentagonaux convenables est un exemple de cette suffisance.

En 1918, dans sa thèse soutenue à l'Université de Francfort, en Allemagne, Karl Reinhardt présente cinq classes de pentagones convexes qui pavent le plan (classes 1 à 5 de l'encadré page 79) et laisse entendre que prouver qu'il n'en existe pas d'autres est un travail fastidieux, mais facile. Pendant 50 ans, la communauté mathématique reste donc persuadée que le problème est résolu et sans intérêt.

Cependant, en 1968, Richard Kershner, de l'Université Johns Hopkins à Baltimore,

reprend l'étude plus soigneusement. Il découvre trois nouvelles classes de pentagones convexes qui pavent le plan (classes 6, 7, 8). Il écrit que c'est le manque de place qui l'empêche de détailler la preuve que les cinq classes précédentes et les trois qu'il vient de découvrir constituent la liste complète des pentagones convexes pavant le plan.

Quand, en juillet 1975, Martin Gardner présente les résultats de Kershner dans sa rubrique de jeux mathématiques du *Scientific American*, il reçoit une lettre de Richard James, informaticien californien, lui proposant une nouvelle classe (classe 10) qui montre que Kershner, comme Reinhardt avant lui, s'est trompé en croyant disposer d'une liste exhaustive.

Le plus étonnant reste à venir. L'Américaine Marjorie Rice (voir l'encadré page ci-contre), mère au foyer qui lisait le magazine de son fils, y voit l'article de Gardner relatant la découverte de R. James. Elle se met à chercher seule de nouveaux pentagones convexes pavant le plan. M. Rice ne possède aucune formation particulière en mathématiques, mais son esprit systématique et un travail minutieux mené à l'aide de petits dessins la font découvrir quatre nouvelles classes oubliées par les professionnels (les classes 9, 11, 12 et 13).

En 1985, une nouvelle classe est découverte (classe 14) par Rolf Stein, de l'Université de Dortmund. Il soutient qu'avec cette quatorzième classe, il complète définitivement l'énumération... avant qu'on découvre que sa démonstration d'exhaustivité est

faussee. Personne depuis n'a osé avancer une démonstration...

La question de savoir si ces 14 classes sont les seules n'est pas résolue depuis plus de 25 ans : ce qui semblait un problème facile est maintenant considéré comme un défi sérieux.

En 2012, le mathématicien japonais Teruhisa Sugimoto a réussi, en même temps que la mathématicienne russe Olga Bagina, à prouver qu'il existe huit classes, pas plus, de pentagones convexes convenant à des pavages « côté-contre-côté », c'est-à-dire où deux pentagones en contact se touchent soit uniquement par un sommet, soit par un côté complet pour chacun.

Ces huit classes sont celles numérotées 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans l'encadré. Les classes 3, 10, 11, 12, 13, 14 ne donnent jamais de pavages côté-contre-côté. Dans le cas de la classe 1, pour avoir des pavages côté-contre-côté, il faut ajouter la contrainte $a = d$; pour la classe 2, il faut ajouter $c = e$; tous les pentagones des classes 4 à 9 produisent des pavages côté-contre-côté sans conditions complémentaires.

Pavés équilatéraux

Un autre théorème a fait avancer nos connaissances sur les pavages pentagonaux convexes. Démontré (avec l'aide d'un ordinateur) en 1985 par Michael Hirschhorn et David Hunt, puis simplifié en 2004 par O. Bagina, le théorème stipule qu'un pentagone équilatéral pave le plan si et seulement

s'il appartient à l'une des trois catégories suivantes :

A) Deux angles adjacents ont une somme de 180° .

B) Deux angles non adjacents ont une somme de 180° .

C) Les cinq angles A, B, C, D, E vérifient les relations $A + 2B = C + 2E = A + C + 2D = 360^\circ$.

L'unique pavé de la classe C est intéressant : il permet plusieurs pavages essentiellement différents, dont certains sont non périodiques (voir la figure 2).

Pour l'instant, bien que l'on connaisse de nombreux pentagones non convexes qui pavent le plan, personne, autant que je sache, n'a proposé, même à titre de conjecture, une liste de tels pentagones qu'on puisse considérer complète.

Les trois classifications des pentagones convexes (dont deux sont définitivement établies) constituent une belle réussite et règlent presque le *Problème des pavés convexes pentagonaux convenables*. Cependant, un seul pavé est parfois utilisable de plusieurs façons pour recouvrir le plan, c'est-à-dire qu'il donne plusieurs pavages ne se ramenant pas les uns aux autres. Ainsi, les pavages de la figure 2 sont essentiellement différents, bien que construits avec le même pentagone. Sait-on classer les pavages pentagonaux convexes ? Comme pour les pavés, la réponse est double : oui dans les cas les plus contraints, non dans le cas général.

Pavages isoédriques

Le cas le plus contraint est celui où l'on impose aux pavés convexes du pavage d'être tous dans une même position les uns relativement aux autres. Pour comprendre ce que cela signifie, considérons le pavage de la figure 3, qui appartient à la classe 8 du recensement en 14 classes. Un pavé y a deux types de positionnement.

En effet, les pavés mauves n'ont pas le même positionnement que les pavés jaunes. On le voit par exemple en remarquant que les « pavés-maisons » jaunes ont sur un côté un « pavé-maison » à l'envers, alors que les « pavés-maisons » mauves n'en ont pas. En revanche, les « pavés-maisons »

Talentueuse Marjorie Rice

Certains amateurs de mathématiques réussissent parfois de véritables exploits et donnent des leçons aux professionnels. Ces professionnels avaient été insouciants vis-à-vis d'un problème, la classification des pavages de pentagones.

Marjorie Rice, qui a 90 ans cette année, fait partie de ces amateurs. Elle écrit :

« J'aime depuis toujours la nature, le dessin, les formes naturelles et leurs relations mathématiques. J'entrais dans le monde

des pavages, il y a 26 ans, à la suite de la lecture d'un article de Martin Gardner trouvé dans la revue *Scientific American* de mon fils. Celle-ci déclencha en moi un vif intérêt pour les pavages et il n'a pas cessé aujourd'hui. L'article présentait des pentagones pavant le plan et demandait s'il en existait d'autres. J'ai toujours aimé la casse-tête et je me dis alors qu'il était peut-être possible pour moi de trouver de nouvelles solutions. J'entrepris de développer mes propres notations qui me per-

mirent d'aborder de manière systématique le problème. » (<http://tesselations.home.comcast.net/~tesselations/>)

En plus de ces découvertes, s'inspirant des pavages décoratifs de Maurits Escher, M. Rice a dessiné ce pavage de poissons fondé sur la classe 2 de la liste des 14 classes connues de pavés pentagonaux convexes. L'enchevêtrement est ici particulièrement compliqué et difficile à déchiffrer pour celui qui ignore sa méthode de construction.

