

s'il appartient à l'une des trois catégories suivantes :

A) Deux angles adjacents ont une somme de 180° .

B) Deux angles non adjacents ont une somme de 180° .

C) Les cinq angles A, B, C, D, E vérifient les relations $A + 2B = C + 2E = A + C + 2D = 360^\circ$.

L'unique pavé de la classe C est intéressant : il permet plusieurs pavages essentiellement différents, dont certains sont non périodiques (voir la figure 2).

Pour l'instant, bien que l'on connaisse de nombreux pentagones non convexes qui pavent le plan, personne, autant que je sache, n'a proposé, même à titre de conjecture, une liste de tels pentagones qu'on puisse considérer complète.

Les trois classifications des pentagones convexes (dont deux sont définitivement établies) constituent une belle réussite et règlent presque le *Problème des pavés convexes pentagonaux convenables*. Cependant, un seul pavé est parfois utilisable de plusieurs façons pour recouvrir le plan, c'est-à-dire qu'il donne plusieurs pavages ne se ramenant pas les uns aux autres. Ainsi, les pavages de la figure 2 sont essentiellement différents, bien que construits avec le même pentagone. Sait-on classer les pavages pentagonaux convexes ? Comme pour les pavés, la réponse est double : oui dans les cas les plus contraints, non dans le cas général.

Pavages isoédriques

Le cas le plus contraint est celui où l'on impose aux pavés convexes du pavage d'être tous dans une même position les uns relativement aux autres. Pour comprendre ce que cela signifie, considérons le pavage de la figure 3, qui appartient à la classe 8 du recensement en 14 classes. Un pavé y a deux types de positionnement.

En effet, les pavés mauves n'ont pas le même positionnement que les pavés jaunes. On le voit par exemple en remarquant que les « pavés-maisons » jaunes ont sur un côté un « pavé-maison » à l'envers, alors que les « pavés-maisons » mauves n'en ont pas. En revanche, les « pavés-maisons »

Talentueuse Marjorie Rice

Certains amateurs de mathématiques réussissent parfois de véritables exploits et donnent des leçons aux professionnels. Ces professionnels avaient été insouciants vis-à-vis d'un problème, la classification des pavages de pentagones.

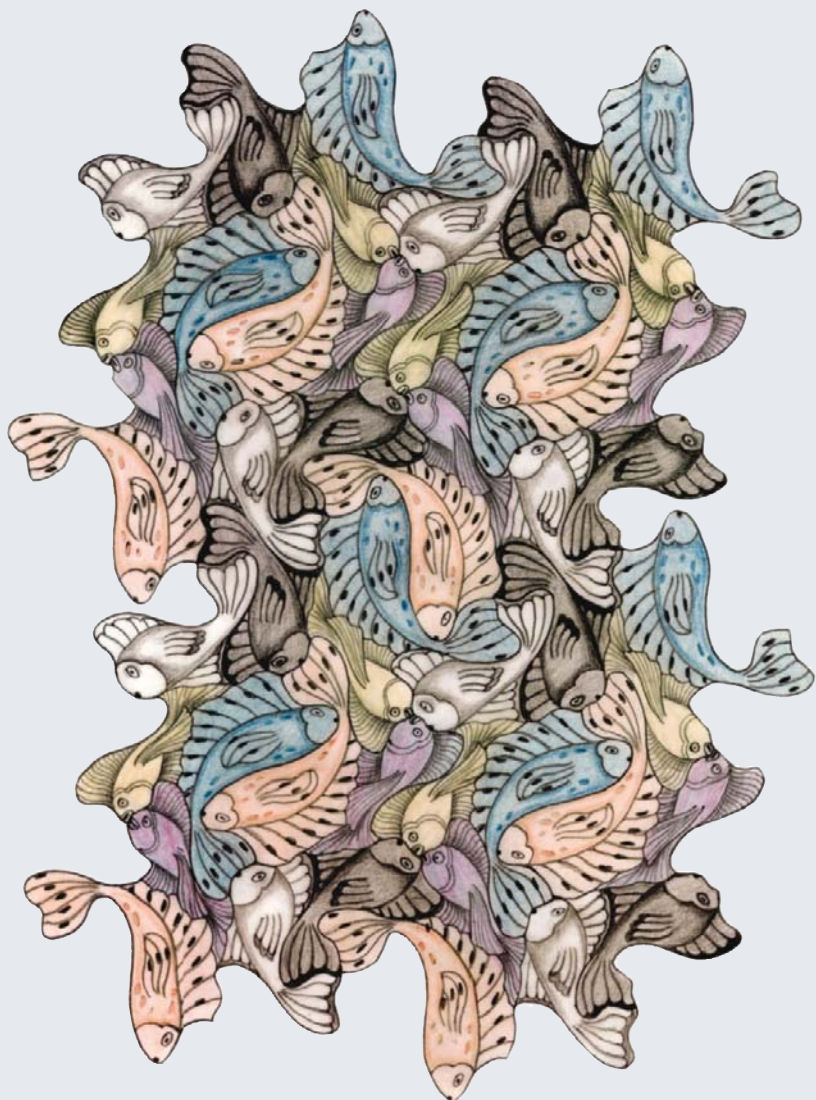
Marjorie Rice, qui a 90 ans cette année, fait partie de ces amateurs. Elle écrit :

« J'aime depuis toujours la nature, le dessin, les formes naturelles et leurs relations mathématiques. J'entrais dans le monde

des pavages, il y a 26 ans, à la suite de la lecture d'un article de Martin Gardner trouvé dans la revue *Scientific American* de mon fils. Celle-ci déclencha en moi un vif intérêt pour les pavages et il n'a pas cessé aujourd'hui. L'article présentait des pentagones pavant le plan et demandait s'il en existait d'autres. J'ai toujours aimé la casse-tête et je me dis alors qu'il était peut-être possible pour moi de trouver de nouvelles solutions. J'entrepris de développer mes propres notations qui me per-

mirent d'aborder de manière systématique le problème. » (<http://tesselations.home.comcast.net/~tesselations/>)

En plus de ces découvertes, s'inspirant des pavages décoratifs de Maurits Escher, M. Rice a dessiné ce pavage de poissons fondé sur la classe 2 de la liste des 14 classes connues de pavés pentagonaux convexes. L'enchevêtrement est ici particulièrement compliqué et difficile à déchiffrer pour celui qui ignore sa méthode de construction.



mauves ont tous des positions équivalentes, et c'est vrai aussi pour les pavés jaunes. Pour ce pavage, il y a donc deux types de positions possibles pour le pavé pentagonal : un tel pavage n'est pas isoédrique, un pavage étant isoédrique lorsqu'il n'y a qu'un seul type de position pour le pavé, ce qui est le cas pour les pavages des classes 1 à 5 représentés dans l'encadré page 79.

En termes plus techniques, un pavage isoédrique est un pavage où les isométries du plan (translations, rotations, symétries et compositions de ces transformations) laissant invariant le pavage permettent de passer d'un pavé donné à n'importe quel autre. Autrement dit, un pavage est isoédrique quand tous les pavés se valent, aux isométries du pavage près.

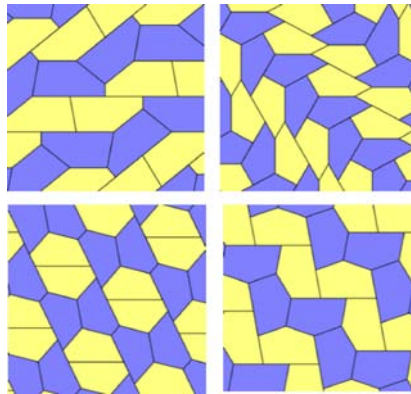
Un beau et difficile théorème, démontré par Branko Grünbaum et Goeffrey Shephard en 1977, indique qu'il existe :

- 14 catégories de pavages isoédriques par des triangles,
- 56 pour des quadrilatères convexes,
- 24 pour des pentagones convexes
- et 13 pour les hexagones convexes.

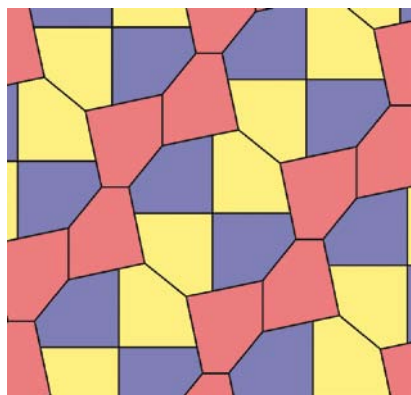
On sait par ailleurs, d'après un résultat démontré la même année par Ivan Niven, qu'il n'existe aucun pavage par un polygone convexe à k côtés lorsque $k > 6$. Cela règle définitivement la classification des pavages isoédriques par des polygones convexes : il existe 107 types de tels pavages.

Lorsqu'un pavage comporte deux types de positionnements de pavés, comme celui de la figure 3, on dit que le pavage est 2-isoédrique. Trouver toutes les catégories de pavages 2-isoédriques par des pentagones convexes est un problème difficile. C'est encore un amateur qui a, le premier, proposé une solution. Tout récemment, en programmant soigneusement une recherche systématique, le Néerlandais Jaap Scherphuis (qui est aussi un collectionneur passionné de casse-tête, voir www.jaapsch.net/puzzles/) a trouvé 97 classes de pavages par des pentagones convexes 2-isoédriques (voir la figure 4 pour quatre d'entre eux).

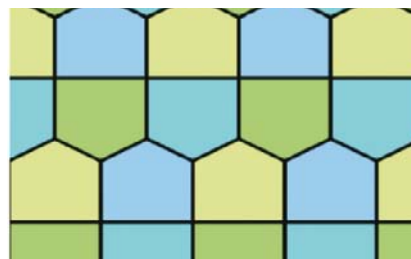
La liste de 97 pavages, qu'on trouvera sur www.jaapsch.net/tilings/, ne contient que des pavages où la proportion des pavés d'une couleur est égale à celle de l'autre



4. QUATRE PAVAGES 2-ISOÉDRIQUES
réalisés avec un pentagone convexe.



5. UN PAVAGE 3-ISOÉDRIQUE
réalisé avec un pentagone convexe.



6. LES DEUX SOLUTIONS DE BASE
pour un pavage pentagonal optimal.

couleur. Même si cela semble improbable, il se pourrait qu'il existe des pavages où ces proportions ne sont pas identiques. Si c'est le cas, l'énumération des 97 pavages de J. Scherphuis devra être complétée. Les résultats de cet amateur attendent confirmation. Qui saura démontrer que la liste des 97 pavages 2-isoédriques est complète ?

Il existe aussi des pavages 3-isoédriques du plan par des pentagones convexes : le pavé peut occuper trois types de positions différentes. C'est le cas du pavage, associé à la classe 10, représenté sur la figure 5. J. Scherphuis en propose bien d'autres.

Une énumération complète de toutes les classes de pavages pentagonaux convexes (isoédriques, 2-isoédriques, 3-isoédriques, etc.) est un objectif qui apparaît pour l'instant hors de portée. Quand on aura réussi, il restera encore à envisager les pentagones non convexes. Voilà de quoi occuper les amateurs et les professionnels pour de longues années.

Pavages optimaux

La troisième question centrale relative aux pavages pentagonaux est d'une nature un peu différente et, cette fois, elle est presque totalement résolue. Il s'agit du problème des pavages pentagonaux optimaux.

Les abeilles sont géomètres et ont choisi la forme de leurs alvéoles en utilisant un résultat mathématique qui n'a été démontré que récemment. Selon la conjecture des alvéoles d'abeilles, l'hexagone régulier d'aire unité est le polygone d'aire unité qui donne le pavage du plan le plus économique en longueur de périmètre. Cette affirmation, dont on trouve des traces chez le Romain Marcus Terentius Varro en 36 avant notre ère, semble presque évidente. Elle ne l'est pas du tout et n'a été démontrée qu'en 1999 par l'Américain Thomas Hales, connu aussi pour sa preuve de la conjecture de Kepler sur les empilements les plus denses de sphères.

Si l'on s'impose de ne considérer que des pavages par des pentagones d'aire unité, se pose une question naturelle de même nature que celle résolue par Th. Hales : quel est le pavage optimal par des pentagones ? (Les