

mauves ont tous des positions équivalentes, et c'est vrai aussi pour les pavés jaunes. Pour ce pavage, il y a donc deux types de positions possibles pour le pavé pentagonal : un tel pavage n'est pas isoédrique, un pavage étant isoédrique lorsqu'il n'y a qu'un seul type de position pour le pavé, ce qui est le cas pour les pavages des classes 1 à 5 représentés dans l'encadré page 79.

En termes plus techniques, un pavage isoédrique est un pavage où les isométries du plan (translations, rotations, symétries et compositions de ces transformations) laissant invariant le pavage permettent de passer d'un pavé donné à n'importe quel autre. Autrement dit, un pavage est isoédrique quand tous les pavés se valent, aux isométries du pavage près.

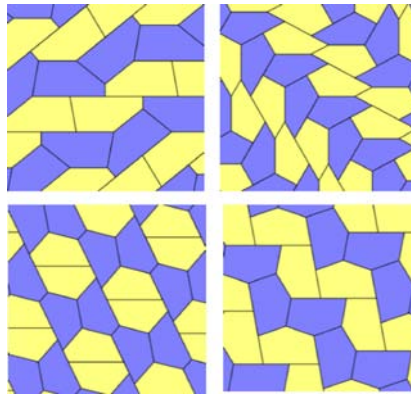
Un beau et difficile théorème, démontré par Branko Grünbaum et Geoffrey Shephard en 1977, indique qu'il existe :

- 14 catégories de pavages isoédriques par des triangles,
- 56 pour des quadrilatères convexes,
- 24 pour des pentagones convexes
- et 13 pour les hexagones convexes.

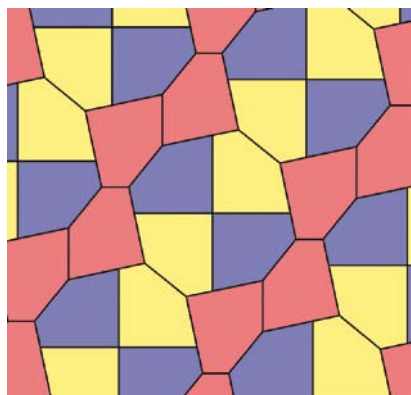
On sait par ailleurs, d'après un résultat démontré la même année par Ivan Niven, qu'il n'existe aucun pavage par un polygone convexe à k côtés lorsque $k > 6$. Cela règle définitivement la classification des pavages isoédriques par des polygones convexes : il existe 107 types de tels pavages.

Lorsqu'un pavage comporte deux types de positionnements de pavés, comme celui de la figure 3, on dit que le pavage est 2-isoédrique. Trouver toutes les catégories de pavages 2-isoédriques par des pentagones convexes est un problème difficile. C'est encore un amateur qui a, le premier, proposé une solution. Tout récemment, en programmant soigneusement une recherche systématique, le Néerlandais Jaap Scherphuis (qui est aussi un collectionneur passionné de casse-tête, voir www.jaapsch.net/puzzles/) a trouvé 97 classes de pavages par des pentagones convexes 2-isoédriques (voir la figure 4 pour quatre d'entre eux).

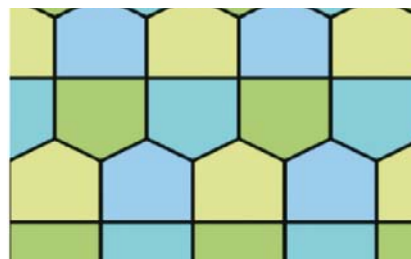
La liste de 97 pavages, qu'on trouvera sur www.jaapsch.net/tilings/, ne contient que des pavages où la proportion des pavés d'une couleur est égale à celle de l'autre



4. QUATRE PAVAGES 2-ISOÉDRIQUES
réalisés avec un pentagone convexe.



5. UN PAVAGE 3-ISOÉDRIQUE
réalisé avec un pentagone convexe.



6. LES DEUX SOLUTIONS DE BASE
pour un pavage pentagonal optimal.

couleur. Même si cela semble improbable, il se pourrait qu'il existe des pavages où ces proportions ne sont pas identiques. Si c'est le cas, l'énumération des 97 pavages de J. Scherphuis devra être complétée. Les résultats de cet amateur attendent confirmation. Qui saura démontrer que la liste des 97 pavages 2-isoédriques est complète ?

Il existe aussi des pavages 3-isoédriques du plan par des pentagones convexes : le pavé peut occuper trois types de positions différentes. C'est le cas du pavage, associé à la classe 10, représenté sur la figure 5. J. Scherphuis en propose bien d'autres.

Une énumération complète de toutes les classes de pavages pentagonaux convexes (isoédriques, 2-isoédriques, 3-isoédriques, etc.) est un objectif qui apparaît pour l'instant hors de portée. Quand on aura réussi, il restera encore à envisager les pentagones non convexes. Voilà de quoi occuper les amateurs et les professionnels pour de longues années.

Pavages optimaux

La troisième question centrale relative aux pavages pentagonaux est d'une nature un peu différente et, cette fois, elle est presque totalement résolue. Il s'agit du problème des pavages pentagonaux optimaux.

Les abeilles sont géomètres et ont choisi la forme de leurs alvéoles en utilisant un résultat mathématique qui n'a été démontré que récemment. Selon la conjecture des alvéoles d'abeilles, l'hexagone régulier d'aire unité est le polygone d'aire unité qui donne le pavage du plan le plus économique en longueur de périmètre. Cette affirmation, dont on trouve des traces chez le Romain Marcus Terentius Varro en 36 avant notre ère, semble presque évidente. Elle ne l'est pas du tout et n'a été démontrée qu'en 1999 par l'Américain Thomas Hales, connu aussi pour sa preuve de la conjecture de Kepler sur les empilements les plus denses de sphères.

Si l'on s'impose de ne considérer que des pavages par des pentagones d'aire unité, se pose une question naturelle de même nature que celle résolue par Th. Hales : quel est le pavage optimal par des pentagones ? (Les

Une infinité de pavages pentagonaux optimaux

Si l'on veut paver le plan par des polygones d'aire unité et de périmètre aussi petit que possible, la solution est le pavage par des hexagones réguliers, comme les alvéoles d'une ruche. Cette optimalité du pé-

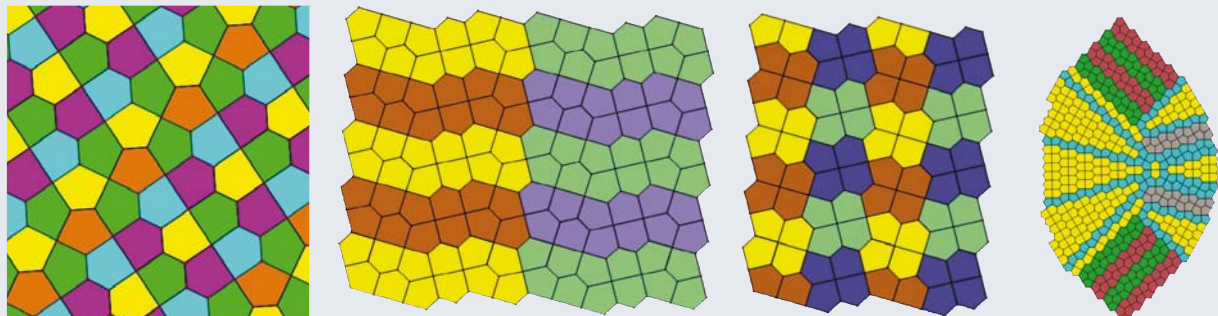
rimètre a été démontrée en 1999 par Thomas Hales.

Si l'on impose au pavé recherché d'être pentagonal, alors la solution est double. Le pavé optimal est soit une variante du pentagone

du Caire, soit le pentagone en forme de petite maison décrit dans l'article. Le plus étonnant est que ces deux pentagones optimaux se combinent d'une infinité de façons différentes, conduisant à des pavages

pentagonaux optimaux d'une remarquable variété.

Voici quatre de ces compositions optimales découvertes il y a trois ans par Ping Ngai Chung, du MIT, et ses collègues.



abeilles auraient dû résoudre cette question si les hexagones leur étaient interdits !).

La réponse a été publiée en 2012 par une équipe de mathématiciens réunis autour de Ping Ngai Chung, du MIT. Il y a une surprise : il existe plusieurs solutions optimales, alors qu'on n'en attendait qu'une seule.

Si l'on impose à tous les pavés du pavage d'avoir la même forme, il y a deux solutions (voir la figure 6) : une variante du pavage pentagonal du Caire et une variante du pavage pentagonal prismatique (cas particulier de la classe 1).

Le périmètre, pour une aire unité, de chacun de ces deux pavés est égal à : $2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 3,86$. C'est mieux que le périmètre d'un carré d'aire unité, qui est 4, mais c'est bien sûr un peu moins bien que le périmètre d'un hexagone régulier d'aire unité, qui est 3,81 (et qui, d'après le théorème de Hales, ne peut pas être battu).

Précisons que pour que les pavés pentagonaux soient optimaux, il faut prendre les longueurs des côtés des pentagones de manière à ce que ces derniers contiennent un cercle inscrit. Cela signifie en pratique qu'il faut introduire trois constantes pour décrire ces pentagones. La variante optimale du pentagone du Caire a un petit côté de longueur a , ses quatre autres côtés étant de longueur b . La variante optimale du pavage

prismatique est telle que la longueur des côtés formant le toit est a , celle des murs est b et celle de la base est c , et tout cela avec : $a = (2/3)\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = 0,5977\dots$, $b = (3 + \sqrt{3})(\sqrt{2 - \sqrt{3}})/3 = 0,8165\dots$, $c = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 1,0353\dots$

Ce qui a le plus surpris les chercheurs est que ces deux pavés optimaux se combinent et donnent d'autres pavages optimaux utilisant cette fois les deux formes pentagonales optimales dans des proportions variables. La variété des combinaisons est étonnante.

Concernant ce beau résultat, signalons que la démonstration proposée suppose que les pavés sont convexes. Tout le monde est persuadé qu'un pavé pentagonal non convexe ne peut pas faire mieux que les deux pavés trouvés (et leurs associations), mais cela n'est pas démontré.

Les recherches sur les pavages sont pleines de pièges. Qu'il ait fallu attendre 1999 pour que l'on démontre la sagesse instinctive des abeilles, qu'on ait pu se tromper si souvent sur l'énumération des classes de pentagones convexes (dont on n'a pas démontré qu'elle était complète), qu'on ne puisse énumérer les pavages pentagonaux non convexes, ou non isoédriques, voilà de quoi encourager l'humilité des mathématiciens, qu'ils soient amateurs patients, programmeurs experts ou théoriciens acharnés.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Scherphuis, *Tilings*, 2013 : <http://www.jaapsch.net/tilings/>

M. Rice, *Tessellations*, 2013 : <http://home.comcast.net/~tessellations/index.htm>

P. N. Chung *et al.*, *Isoperimetric pentagonal tilings*, *Notices of the AMS*, vol. 59(5), pp. 632-649, 2012.

Th. Hales, *The honeycomb conjecture*, *Discrete and Computational Geometry*, vol. 25, pp. 1-22, 2001.

B. Grünbaum et G. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman & Company, 1987.

D. Schattschneider, *Tiling the plane with congruent pentagons*, *Mathematics Magazine*, vol. 51, pp. 29-44, 1978.