

Une infinité de pavages pentagonaux optimaux

Si l'on veut paver le plan par des polygones d'aire unité et de périmètre aussi petit que possible, la solution est le pavage par des hexagones réguliers, comme les alvéoles d'une ruche. Cette optimalité du pé-

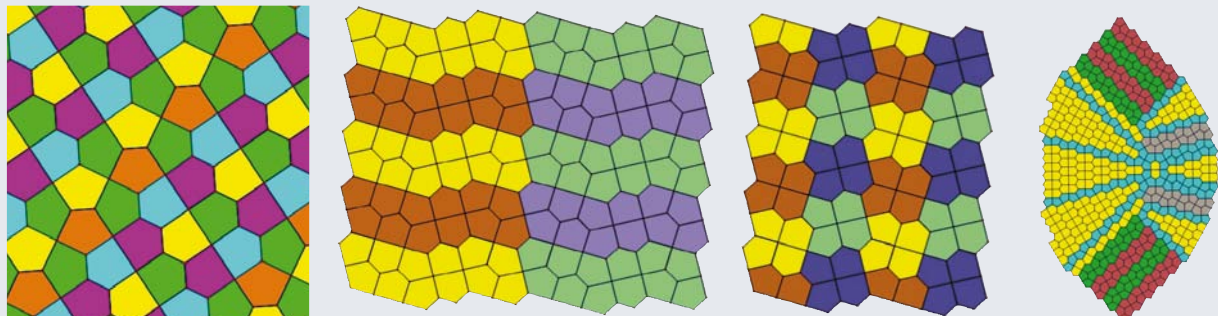
rimètre a été démontrée en 1999 par Thomas Hales.

Si l'on impose au pavé recherché d'être pentagonal, alors la solution est double. Le pavé optimal est soit une variante du pentagone

du Caire, soit le pentagone en forme de petite maison décrit dans l'article. Le plus étonnant est que ces deux pentagones optimaux se combinent d'une infinité de façons différentes, conduisant à des pavages

pentagonaux optimaux d'une remarquable variété.

Voici quatre de ces compositions optimales découvertes il y a trois ans par Ping Ngai Chung, du MIT, et ses collègues.



abeilles auraient dû résoudre cette question si les hexagones leur étaient interdits !).

La réponse a été publiée en 2012 par une équipe de mathématiciens réunis autour de Ping Ngai Chung, du MIT. Il y a une surprise : il existe plusieurs solutions optimales, alors qu'on n'en attendait qu'une seule.

Si l'on impose à tous les pavés du pavage d'avoir la même forme, il y a deux solutions (voir la figure 6) : une variante du pavage pentagonal du Caire et une variante du pavage pentagonal prismatique (cas particulier de la classe 1).

Le périmètre, pour une aire unité, de chacun de ces deux pavés est égal à : $2\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 3,86$. C'est mieux que le périmètre d'un carré d'aire unité, qui est 4, mais c'est bien sûr un peu moins bien que le périmètre d'un hexagone régulier d'aire unité, qui est 3,81 (et qui, d'après le théorème de Hales, ne peut pas être battu).

Précisons que pour que les pavés pentagonaux soient optimaux, il faut prendre les longueurs des côtés des pentagones de manière à ce que ces derniers contiennent un cercle inscrit. Cela signifie en pratique qu'il faut introduire trois constantes pour décrire ces pentagones. La variante optimale du pentagone du Caire a un petit côté de longueur a , ses quatre autres côtés étant de longueur b . La variante optimale du pavage

prismatique est telle que la longueur des côtés formant le toit est a , celle des murs est b et celle de la base est c , et tout cela avec : $a = (2/3)\sqrt{6-3\sqrt{3}} = 0,5977\dots$, $b = (3+\sqrt{3})(\sqrt{2-\sqrt{3}})/3 = 0,8165\dots$, $c = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1,0353\dots$

Ce qui a le plus surpris les chercheurs est que ces deux pavés optimaux se combinent et donnent d'autres pavages optimaux utilisant cette fois les deux formes pentagonales optimales dans des proportions variables. La variété des combinaisons est étonnante.

Concernant ce beau résultat, signalons que la démonstration proposée suppose que les pavés sont convexes. Tout le monde est persuadé qu'un pavé pentagonal non convexe ne peut pas faire mieux que les deux pavés trouvés (et leurs associations), mais cela n'est pas démontré.

Les recherches sur les pavages sont pleines de pièges. Qu'il ait fallu attendre 1999 pour que l'on démontre la sagesse instinctive des abeilles, qu'on ait pu se tromper si souvent sur l'énumération des classes de pentagones convexes (dont on n'a pas démontré qu'elle était complète), qu'on ne puisse énumérer les pavages pentagonaux non convexes, ou non isoédriques, voilà de quoi encourager l'humilité des mathématiciens, qu'ils soient amateurs patients, programmeurs experts ou théoriciens acharnés.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Scherphuis, *Tilings*, 2013 : <http://www.jaapsch.net/tilings/>

M. Rice, *Tessellations*, 2013 : <http://home.comcast.net/~tessellations/index.htm>

P. N. Chung *et al.*, *Isoperimetric pentagonal tilings*, *Notices of the AMS*, vol. 59(5), pp. 632-649, 2012.

Th. Hales, *The honeycomb conjecture*, *Discrete and Computational Geometry*, vol. 25, pp. 1-22, 2001.

B. Grünbaum et G. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman & Company, 1987.

D. Schattschneider, *Tiling the plane with congruent pentagons*, *Mathematics Magazine*, vol. 51, pp. 29-44, 1978.

SCIENCE & FICTION

Menaces invisibles

Les bactéries et les virus sont des micro-organismes invisibles à l'œil nu, mais dont les conséquences sont parfois dramatiques. Rien de tel pour stimuler les imaginations !

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Quand la science-fiction met en scène l'extinction de l'espèce humaine, elle n'invoque pas uniquement le débarquement d'une armada extraterrestre, mais aussi l'invasion par des tueurs microscopiques, bactéries ou virus. Ainsi, le roman *World War Z* de Max Brooks (2006), récemment adapté au cinéma, met en scène un mystérieux virus transformant les humains en zombies. Dans notre monde, ces tueurs existent réellement et leur taille ne limite en rien leur capacité de destruction massive.

Le terme « bactérie » apparaît dans la littérature en 1828 avec le microbiologiste allemand Christian Ehrenberg. Ce dernier levait le voile sur un règne dont la masse est supérieure à celle de toutes les autres espèces vivantes ! Les bactéries sont les premières formes de vie apparues sur Terre et sont présentes partout : dans l'eau, l'air, le sol ou la glace. L'organisme humain héberge même dix fois plus de bactéries que de cellules : il y en aurait sans doute quelques milliers d'espèces, et elles pèsent environ un kilogramme chez un adulte ! Omniprésentes, elles sont aussi très résistantes : beaucoup sont extrémophiles, capables de résister à des conditions extrêmes de température, pression, salinité ou acidité.

Deinococcus radiodurans, par exemple, résiste au dessèchement, aux rayonnements ultraviolets et ionisants, au vide ou encore à l'acide, et ce grâce à sa structure cellulaire particulière et à son système très efficace de réparation de l'ADN. Elle supporte aussi



1. DANS LE FILM *WORLD WAR Z*, un virus rend violentes les personnes qu'il contamine. Les victimes de cette pandémie deviennent des tueurs. Jusqu'au moment où Brad Pitt décide de s'attaquer à la cause du mal...

des doses de radioactivité 5 000 fois supérieures à celles qui tuent une cellule humaine.

Pourquoi s'intéresser aux bactéries ? Parce que certaines d'entre elles sont très dangereuses pour l'homme, comme l'ont montré pour la première fois Louis Pasteur et Robert Koch dès la seconde moitié du XIX^e siècle. Certaines bactéries sont responsables de graves maladies infectieuses, et avant l'invention des antiseptiques, désinfectants et antibiotiques, les bactéries faisaient des ravages. D'ailleurs, bien avant que leur nature réelle soit connue, elles furent utilisées comme arme de destruction massive : lors du siège de Caffa – aujourd'hui Féodosie, cité ukrainienne au Nord de la mer Noire – en 1346, l'armée tatare, alors atteinte d'une grave épidémie, catapulta les cadavres de ses soldats derrière les murs de la cité assiégée. Et avec eux *Yersinia pestis*, minuscule bacille (bactérie en forme de bâtonnet) responsable de la peste noire. Le bacille tua près de la moitié de l'Europe – 25 millions de personnes – entre 1347 et 1352.

Dans le *Retour du Roi*, troisième tome du *Seigneur des Anneaux* de J. R. R. Tolkien (1955), les Orques emploient la même technique en bombardant Minas Tirith de divers projectiles, dont les têtes de leurs victimes décapitées par leurs lames empoisonnées, alliant ainsi guerre bactériologique et psychologique. Héritée de la guerre froide, cette attirance mêlée de crainte pour les bactéries est d'autant plus marquée que ces micro-organismes peuvent vite échapper à tout contrôle ou tomber entre de mauvaises mains.