

ART & SCIENCE

Le crochet, le corail et la géométrie

La forme du corail est l'une des manifestations de la géométrie hyperbolique. L'un des seuls moyens de représenter concrètement les espaces correspondant à cette géométrie est une activité surannée : le crochet.

Loïc MANGIN

Le crochet a mauvaise réputation : cet avatar de la dentelle ne serait pratiqué que par des femmes, plutôt âgées, réunies dans des clubs. Cette image désuète est fautive, au moins en partie. Depuis quelques années, l'art du crochet est redevenu à la mode et l'on ne compte plus les blogs dédiés. Mieux, de la science se cache dans ces ouvrages en mailles qui ornent les fauteuils et le dessus des téléviseurs.

Cet aspect a été exploré en 2005 par Margaret et Christine Wertheim, fondatrices de l'*Institute for Figuring* (IFF), à Los Angeles. Cette institution promeut l'esthétique et les dimensions poétiques de la science et des mathématiques sans recourir à la manipulation de concepts abstraits.

Leur premier projet, nommé *Crochet coral reef*, fut la confection en crochet d'un récif corallien ! L'idée semble saugrenue, elle est pourtant pertinente. Voyons pourquoi. Dans le monde vivant, beaucoup de formes sont crénelées, dentelées, frisées... Citons les algues, les feuilles de laitue, les limaces de mer... et les coraux. Ces surfaces relèvent de la géométrie hyperbolique, l'un des trois types de géométries qui existent.

Une façon de les décrire est fondée sur le postulat des parallèles. Selon Euclide, par un point extérieur à une droite donnée ne passe qu'une parallèle à cette droite. Pendant quelque 2 000 ans, on a tenu ce postulat pour incontournable. Pourtant, au XIX^e siècle, des mathématiciens (Riemann, Lobatchevski...) s'en sont

affranchis. Dans la géométrie sphérique, le nombre de parallèles à une droite donnée est nul ; dans la géométrie hyperbolique, il est infini.

Ainsi, depuis des millions d'années, des organismes exhibent, souvent avec moult couleurs, des concepts découverts il y a moins de 200 ans ! Cependant, alors que les géométries euclidienne et sphérique sont facilement modélisables par un objet physique, respectivement un plan et la surface d'un ballon, la géométrie hyperbolique a longtemps résisté aux tentatives. L'idée est de représenter graphiquement et de façon cohérente une géométrie et ses propriétés.

Depuis des millions d'années, des organismes vivants exposent en couleurs des concepts découverts il y a moins de 200 ans.

Pour la géométrie hyperbolique, la difficulté est telle que beaucoup en ont conclu que cette représentation était impossible.

Plusieurs modèles ont certes été proposés, par exemple celui de Klein-Beltrami et le disque de Poincaré (plusieurs œuvres d'Escher sont fondées sur cette représentation), mais ils restaient trop conceptuels. Le mathématicien William Thurston avait créé un modèle en papier, mais il était très fragile. Puis, en 1997, Daina Taimina, mathématicienne à l'Université Cornell, montra que le crochet pouvait relever le défi.

De fait, le principe du crochet, selon lequel on augmente progressivement le nombre

de mailles des rangs, coïncide avec une propriété de la géométrie hyperbolique : la circonférence d'un cercle augmente de façon linéaire avec le rayon sur un plan euclidien, mais de façon exponentielle sur un plan hyperbolique. Ainsi, la géométrie hyperbolique, dont le corail est une des représentations, peut être confectionnée au crochet !

Plus encore, selon la règle suivie, on obtient des modèles différents. Par exemple, on augmente d'une maille à chaque rang dans la figure *b* et tous les trois rangs dans la figure *c*. La figure *d* montre des droites (*en jaune*) cousues sur un plan hyperbolique.

Le projet de l'IFF a commencé par une petite annonce pour recruter des « crocheteurs ». Il a pris de l'ampleur et rassemble aujourd'hui des milliers de participants de par le monde. Le musée Andy Warhol, de Pittsburg, en Pennsylvanie, fut parmi les premiers intéressés par le projet : l'institution exposa un premier récif corallien en laine (*voir la figure a*) dans le cadre de son exposition consacrée au réchauffement climatique.

Puis ce fut Chicago, où une galerie de 300 mètres carrés fut remplie, ensuite New York, Londres... Aujourd'hui, le résultat de cette œuvre participative est visible à Denver et à Copenhague. À chaque fois, une antenne locale de l'IFF est créée afin de fédérer les bonnes volontés de la région. Le *Crochet coral reef* est sans doute devenu l'un des plus grands projets associant l'art et la science. ■



IDÉES DE PHYSIQUE

Être à la même heure que les autres

De la puce au Web, le développement des communications ultrarapides nous rappelle que mettre sa montre à l'heure est un problème... de relativité.

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

Les transactions financières, le transport aérien, certains calculs effectués par les ordinateurs, etc. exigent un temps extrêmement précis et fiable. Comment être certain d'avoir la même heure que les autres alors qu'ils sont distants et que les échanges d'informations se font, au mieux, à la vitesse de la lumière ? Si, dans l'imaginaire collectif, cela évoque l'instantanéité, nous avons tous aujourd'hui dans la poche ou sur le bureau des dispositifs assez rapides pour nous rappeler que cette vitesse a une valeur finie : en une nanoseconde, durée du cycle correspondant à une cadence de microprocesseur de un gigahertz, la lumière ne parcourt guère que 30 centimètres... Derrière les difficultés pratiques qui apparaissent se cache une question bien plus fondamentale : la synchronisation des horloges et la construction de l'espace-temps tel que l'a pensé Albert Einstein en 1905.

De la téléphonie GSM aux puces électroniques

Un premier exemple concerne la téléphonie mobile. Les téléphones GSM (pour *Global System for Mobile communications*) transmettent la voix numériquement codée sous la forme d'ondes radio, plus précisément des micro-ondes de fréquence 0,9 ou 1,8 gigahertz environ. Chaque téléphone s'adresse à l'antenne la plus proche, mais une antenne peut prendre en charge simultanément huit téléphones : sur une trame régulière de 4,615 millisecondes, chaque téléphone dispose tour à tour d'une fenêtre temporelle d'un huitième de cette période, soit 577 microsecondes (voir la figure 1).

Pour un bon fonctionnement, il faut assurer la parfaite coordination temporelle des émissions et réceptions des informations entre l'antenne et les téléphones. Tant que les distances sont courtes, nul besoin de se soucier de la durée de propagation de l'onde radio entre le téléphone et l'antenne. Mais en zone rurale, lorsque les distances peuvent atteindre 30 kilomètres et plus, cette durée dépasse les 100 microsecondes, soit un cinquième environ de l'intervalle temporel disponible pour communiquer. Pour être à l'heure et éviter les chevauchements des créneaux, le téléphone doit ainsi envoyer son signal en avance. Ce délai est déterminé par le serveur de l'antenne émettrice, qui calcule la distance du téléphone en mesurant le temps des allers et retours des signaux.

Dans les réseaux de télécommunication par fibres optiques, le problème devient encore plus sensible, car le débit de transmission et les distances parcourues sont plus grands. Fixer un même temps pour tous est analogue au problème de la coordination d'un grand nombre de gymnastes répartis dans un stade et devant effectuer un même mouvement. Comme il faut 0,3 seconde pour que le son parcoure 100 mètres, si tous les gymnastes suivent le tempo d'un même haut-parleur, le décalage entre eux sera visible. La solution est de multiplier les haut-parleurs de proximité.

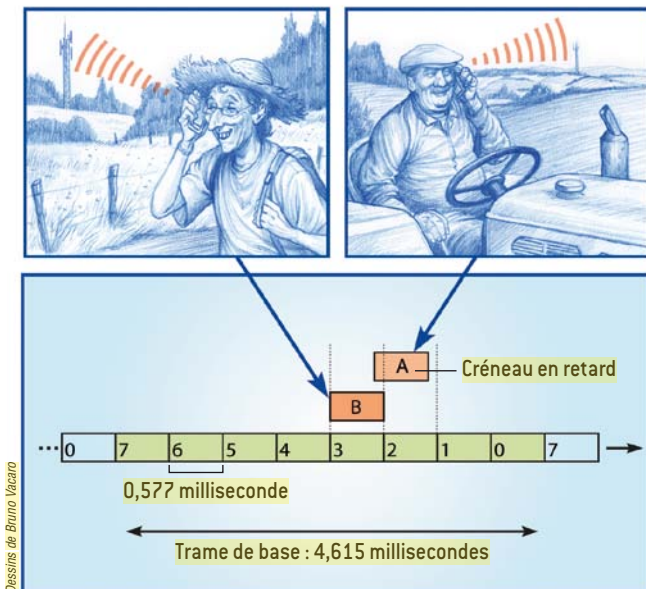
De façon analogue, dans les réseaux, on équipe les nœuds principaux d'horloges atomiques extrêmement précises et stables dont l'information temporelle est transmise à des horloges dites esclaves. Ces dernières sont capables de régénérer cette informa-

tion pour alimenter les horloges de niveau inférieur dans l'arborescence et continuer à fournir le temps exact si l'horloge primaire est en panne.

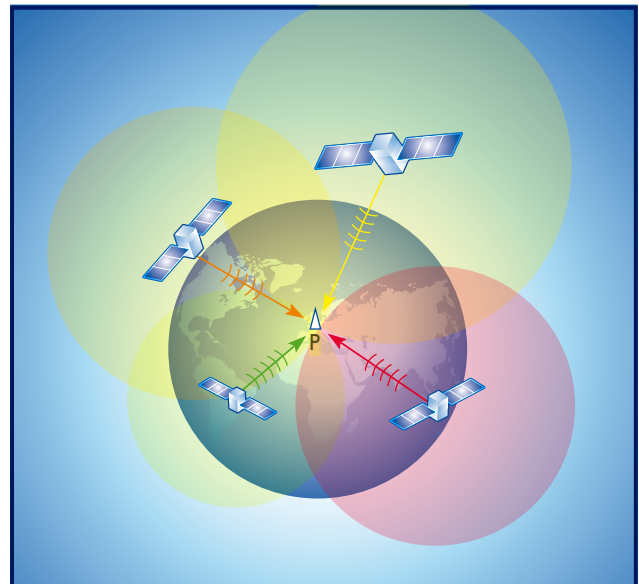
Il reste toutefois indispensable de mettre à l'heure les différentes horloges principales, c'est-à-dire de les synchroniser. Par ailleurs, si cette approche fonctionne dans un réseau organisé en étoile, elle devient plus problématique dans un réseau très ramifié tel qu'Internet, où la propagation peut passer par des chemins différents, avec des temps fluctuants de transfert entre nœuds. Cela impose des protocoles de communication de plus en plus élaborés.

Cette question de synchronisation se pose même à l'intérieur d'une puce électronique ou dans les gros supercalculateurs : en une nanoseconde, le signal électrique parcourt moins d'un centimètre à la surface d'une puce ; or il est essentiel que les signaux d'entrée d'un élément logique arrivent en même temps pour que les calculs s'effectuent correctement.

Derrière toutes ces questions pratiques ou techniques se pose une question fondamentale : comment définir un même temps pour tous ? Comment synchroniser des horloges localisées en des points différents de l'espace ? C'est par une telle réflexion sur le temps et l'espace que débute l'article d'Einstein de 1905 sur la relativité. Einstein constate que, en raison notamment de la valeur finie et absolue (indépendante de l'observateur) de la vitesse de la lumière, il ne peut exister un temps absolu. Einstein construit alors l'espace et le temps uniquement à partir d'objets physiques : des horloges et des ondes électromagnétiques.



1. DANS LE SYSTÈME GSM DE TÉLÉPHONIE MOBILE, chaque antenne peut prendre en charge les signaux de huit téléphones en même temps. À chacun de ces téléphones est attribué un créneau de 0,577 milliseconde [qui peut transmettre jusqu'à 148 bits d'information] dans chaque tranche temporelle de 4,615 millisecondes. La distance antenne-téléphone doit être prise en compte pour ajuster les instants d'émission. Sinon, le créneau d'un téléphone se trouvant par exemple à 30 kilomètres de l'antenne serait décalé, à la réception par celle-ci, de 0,1 milliseconde et chevaucherait le créneau suivant reçu d'un téléphone proche de l'antenne.



2. LA GÉOLOCALISATION PAR SATELLITES nécessite un ensemble d'au moins quatre satellites dont les horloges sont bien synchronisées. La mesure de la distance à trois satellites suffit en principe pour déterminer la position de l'appareil de localisation (P), mais la mesure de ces distances par P, déterminée par les durées des allers et retours des signaux, exige que P ait la même heure que les satellites. Or cet ajustement de l'horloge de P nécessite la présence d'un quatrième satellite : les quatre satellites fournissent ainsi les données requises pour déterminer les quatre coordonnées [trois d'espace, une de temps] de l'appareil P.

Ce que l'on nomme un référentiel d'espace-temps est ainsi une collection d'horloges identiques placées en chaque point de l'espace. Une horloge détermine sa distance avec ses voisines en mesurant la durée nécessaire à un signal électromagnétique, c'est-à-dire de la lumière, pour faire l'aller et retour, comme le fait une antenne GSM avec un téléphone mobile.

Le temps construit avec des objets physiques

Elles peuvent ensuite se synchroniser, toujours par échanges de signaux électromagnétiques : deux horloges A et B sont dites synchronisées si, lorsque l'horloge B renvoie à l'horloge A le signal reçu de cette dernière, l'heure t_B de ce renvoi selon l'horloge B est la moyenne de l'heure d'envoi t_A et de l'heure de retour t_A' sur la première horloge A [c'est-à-dire si $t_B = (t_A + t_A')/2$].

C'est cette philosophie de construction de l'espace-temps qui est mise en œuvre dans les systèmes de géolocalisation par satellites tels que le GPS américain ou le futur *Galileo* européen. Le référentiel GPS est ainsi construit à partir d'horloges atomiques embarquées dans une constellation de satellites et synchronisées, par la procédure décrite plus haut, avec des horloges de référence situées au sol.

Cependant, les horloges sont en mouvement et évoluent dans le champ de gravité de la Terre, ce qui modifie les rythmes relatifs et complique beaucoup la situation. En pratique, des corrections sont effectuées de telle façon qu'à chaque instant, l'heure indiquée par chaque satellite soit identique à l'heure qu'indiquerait une horloge immobile située au même endroit et en l'absence de champ de gravitation.

C'est ce système de référence temporelle qui, aujourd'hui, permet à chacun

LES AUTEURS



Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK sont professeurs de physique à l'Université Pierre et Marie Curie, à Paris. Leur blog : <http://blog.idphys.fr>

Retrouvez les articles de J.-M. Courty et E. Kierlik sur www.pourlascience.fr

