

LOGIQUE & CALCUL

La quête du pavé apériodique unique

Les spécialistes des pavages et des quasi-cristaux espéraient depuis longtemps découvrir un pavé unique avec lequel le pavage du plan serait nécessairement non périodique. Un tel pavé a été trouvé... enfin, presque.

Jean-Paul DELAHAYE

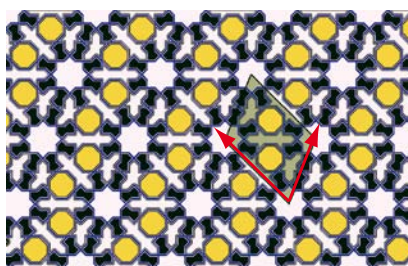
Des contraintes locales ont-elles des conséquences à l'infini ? La théorie des pavages apériodiques a examiné cette question et un domaine de la cristallographie en est né, amenant une interaction nouvelle des mathématiques et de la physique. Dernier résultat : un pavé décoré interdit à lui seul la périodicité ! Ainsi, les aspects ludiques et sérieux de la géométrie se mêlent pour donner de nouveaux outils aux physiciens.

Périodiques ou non ?

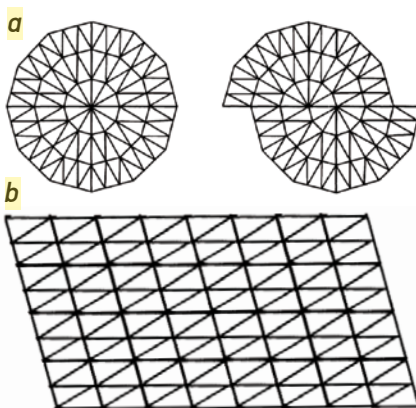
Dans un pavage périodique du plan, une partie finie, en forme de parallélogramme, permet de paver totalement le plan en utilisant deux translations (un pavage est périodique s'il existe deux vecteurs de translation non colinéaires qui le laissent invariant) (voir la figure 1).

Sauf de rares exceptions, les pavages décoratifs utilisent des motifs périodiques, sans doute pour des raisons de facilité d'impression ou d'assemblage. Il est cependant facile de concevoir des motifs non périodiques qui pavent le plan. Deux exemples très simples utilisent un pavé en forme de triangle isocèle, dont l'angle au sommet est égal à 30° ; ce pavé peut bien sûr composer un pavage périodique, comme c'est le cas de tout triangle (voir la figure 2).

On a longtemps pensé que tout ensemble de pavés qui permet de paver le plan autorise aussi un pavage périodique.



1. UN EXEMPLE DE PAVAGE PÉRIODIQUE du plan. Ce pavage peut être construit en dupliquant le parallélogramme en gris et en le translatant selon les deux vecteurs (en rouge) construits sur ses côtés.



2. DEUX EXEMPLES de pavage apériodique du plan (a) dont le pavé élémentaire est un triangle isocèle d'angle au sommet égal à 30° . Ce pavé permet aussi de recouvrir périodiquement le plan (b).

Personne ne réussissant à démontrer cette affirmation, on s'est demandé s'il existait des ensembles de pavés conduisant uniquement à des pavages non périodiques, ce que nous dénommerons des « ensembles de pavés apériodiques ».

Si un tel ensemble existe, alors des contraintes géométriques locales (que des pavés se joignent parfaitement) imposent une propriété globale, l'apériodicité, ce qui n'est pas une évidence (c'est, d'ailleurs, impossible en dimension 1).

Le pavage, un problème indécidable

La solution est issue d'une question algorithmique. Les logiciens, dont en particulier Hao Wang, un confident de Kurt Gödel, se sont posé une question : un ensemble de formes géométriques élémentaires étant donné, peut-on savoir par un moyen systématique, c'est-à-dire par un algorithme, si oui ou non on pourra couvrir tout le plan avec des exemplaires de ces formes sans chevauchement et sans laisser de vide ? C'est le problème de la « décidabilité du pavage ». Il est aussi dénommé « problème des dominos », car une version simplifiée ne fait intervenir que des dominos carrés à côtés colorés que l'on dispose en tenant compte des couleurs (ce que l'on ramène à des pavés sans couleur en déformant les côtés, pour transformer les contraintes de couleur en contraintes de forme).

Si un ensemble fini donné de pavés ne pave pas le plan, on s'en aperçoit en un temps fini, mais non connu à l'avance : on essaie toutes les combinaisons pour paver un disque de rayon 1, puis 2, etc. Si l'ensemble de pavés ne permet pas de paver le plan, on finit par rencontrer un blocage (quand le disque n'est pavable avec aucune combinaison de pavés) et on sait alors qu'il n'existe pas de pavage possible.

De même, si l'on sait qu'un ensemble fini de formes pave le plan de manière périodique, on peut réaliser ce pavage en essayant des formes de plus en plus nombreuses de l'ensemble ; on découvre alors nécessairement comment réaliser le pavage périodique, car vient un moment où l'on tombe sur la partie finie qui recouvre le plan par translation.

Il résulte de ces deux résultats algorithmiques positifs que :

- soit « tout ensemble de pavés qui pave le plan peut le faire de manière périodique » et, dans ce cas, le problème du pavage est décidable (on essaie simultanément de paver des disques de plus en plus grands et de trouver un motif périodique composé de pavés pris dans l'ensemble, et on est assuré d'arriver à une conclusion en un temps fini) ;
- soit « il existe des ensembles de pavés qui pavent le plan, mais qui ne peuvent pas le paver de manière périodique ».

Dit autrement, si le problème du pavage est algorithmiquement indécidable, alors il existe des ensembles de pavés apériodiques.

À l'heure de Berger

La résolution de l'énigme est due à Robert Berger. En 1964, dans sa thèse de doctorat à l'Université Harvard, il montra qu'on peut simuler n'importe quel calcul en choisissant soigneusement un ensemble fini de pavés et en tentant d'en recouvrir le plan. Si la tentative de pavage n'est jamais bloquée, cela signifie que le calcul se poursuit indéfiniment ; si l'on tombe sur un blocage, cela signifie que le calcul est terminé. Comme on sait depuis les travaux d'Alan Turing de 1936 que l'arrêt d'un programme est indécidable, il résulte du système de

La fléchette et le cerf-volant de Penrose

Durant la décennie 1970-1980, le physicien britannique Roger Penrose découvrit des ensembles de pavés apériodiques divers : ils permettent de paver le plan, mais uniquement de façon apériodique. Il réussit à en proposer ne comportant que deux pavés.

L'ensemble *kite-dart* (cerf-volant et fléchette) est simple. Il n'y a que deux sortes de côtés dont le rapport des longueurs est le nombre d'or $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Sans contraintes particulières, ces deux formes pavent le plan de manière périodique : on place la fléchette dans le creux du cerf-volant, ce qui donne un quadrilatère avec lequel on pave périodiquement le plan. En revanche, en colorant les sommets de la fléchette et du cerf-volant et en ne considérant comme acceptables que les pavages où on fait se cor-

respondre des sommets de même couleur, on obtient uniquement des pavages apériodiques. La contrainte des sommets colorés se traduit en contrainte de forme en redessinant les côtés.

On obtient ainsi deux formes qui pavent le plan, mais qui ne le font que d'une manière non périodique : on a un ensemble apériodique à deux éléments. Une question non résolue aujourd'hui est si l'on peut trouver une forme unique qui pave le plan et qui ne le fait que de manière apériodique.

Voici quelques propriétés des pavages convenables obtenus avec la fléchette et le cerf-volant.

- Un pavage convenable ne possède jamais de symétrie de translation (non seulement il n'existe pas deux vecteurs de translation le laissant

invariant, mais il n'en existe pas même un seul).

– Toute partie finie de tout pavage convenable se retrouve une infinité de fois dans tout autre pavage ; en ce sens, tous les pavages convenables se ressemblent.

– Il existe une infinité non dénombrable de pavages convenables possibles (tous apériodiques) ne se ramenant pas l'un à l'autre.

– Dans tout pavage convenable, il existe des parties finies arbitrairement grandes qui possèdent une symétrie de rotation d'ordre 5 (rotation d'angle $2\pi/5$).

– Dans tout pavage convenable, si l'on prend des disques de plus en plus grands, le rapport entre le nombre de cerfs-volants contenus dans le disque et le nombre de fléchettes tend vers le nombre d'or τ .

