

Si un ensemble fini donné de pavés ne pave pas le plan, on s'en aperçoit en un temps fini, mais non connu à l'avance : on essaie toutes les combinaisons pour paver un disque de rayon 1, puis 2, etc. Si l'ensemble de pavés ne permet pas de paver le plan, on finit par rencontrer un blocage (quand le disque n'est pavable avec aucune combinaison de pavés) et on sait alors qu'il n'existe pas de pavage possible.

De même, si l'on sait qu'un ensemble fini de formes pave le plan de manière périodique, on peut réaliser ce pavage en essayant des formes de plus en plus nombreuses de l'ensemble ; on découvre alors nécessairement comment réaliser le pavage périodique, car vient un moment où l'on tombe sur la partie finie qui recouvre le plan par translation.

Il résulte de ces deux résultats algorithmiques positifs que :

- soit « tout ensemble de pavés qui pave le plan peut le faire de manière périodique » et, dans ce cas, le problème du pavage est décidable (on essaie simultanément de paver des disques de plus en plus grands et de trouver un motif périodique composé de pavés pris dans l'ensemble, et on est assuré d'arriver à une conclusion en un temps fini) ;
- soit « il existe des ensembles de pavés qui pavent le plan, mais qui ne peuvent pas le paver de manière périodique ».

Dit autrement, si le problème du pavage est algorithmiquement indécidable, alors il existe des ensembles de pavés apériodiques.

À l'heure de Berger

La résolution de l'énigme est due à Robert Berger. En 1964, dans sa thèse de doctorat à l'Université Harvard, il montra qu'on peut simuler n'importe quel calcul en choisissant soigneusement un ensemble fini de pavés et en tentant d'en recouvrir le plan. Si la tentative de pavage n'est jamais bloquée, cela signifie que le calcul se poursuit indéfiniment ; si l'on tombe sur un blocage, cela signifie que le calcul est terminé. Comme on sait depuis les travaux d'Alan Turing de 1936 que l'arrêt d'un programme est indécidable, il résulte du système de

La fléchette et le cerf-volant de Penrose

Durant la décennie 1970-1980, le physicien britannique Roger Penrose découvrit des ensembles de pavés apériodiques divers : ils permettent de paver le plan, mais uniquement de façon apériodique. Il réussit à en proposer ne comportant que deux pavés.

L'ensemble *kite-dart* (cerf-volant et fléchette) est simple. Il n'y a que deux sortes de côtés dont le rapport des longueurs est le nombre d'or $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Sans contraintes particulières, ces deux formes pavent le plan de manière périodique : on place la fléchette dans le creux du cerf-volant, ce qui donne un quadrilatère avec lequel on pave périodiquement le plan. En revanche, en colorant les sommets de la fléchette et du cerf-volant et en ne considérant comme acceptables que les pavages où on fait se cor-

respondre des sommets de même couleur, on obtient uniquement des pavages apériodiques. La contrainte des sommets colorés se traduit en contrainte de forme en redessinant les côtés.

On obtient ainsi deux formes qui pavent le plan, mais qui ne le font que d'une manière non périodique : on a un ensemble apériodique à deux éléments. Une question non résolue aujourd'hui est si l'on peut trouver une forme unique qui pave le plan et qui ne le fait que de manière apériodique.

Voici quelques propriétés des pavages convenables obtenus avec la fléchette et le cerf-volant.

- Un pavage convenable ne possède jamais de symétrie de translation (non seulement il n'existe pas deux vecteurs de translation le laissant

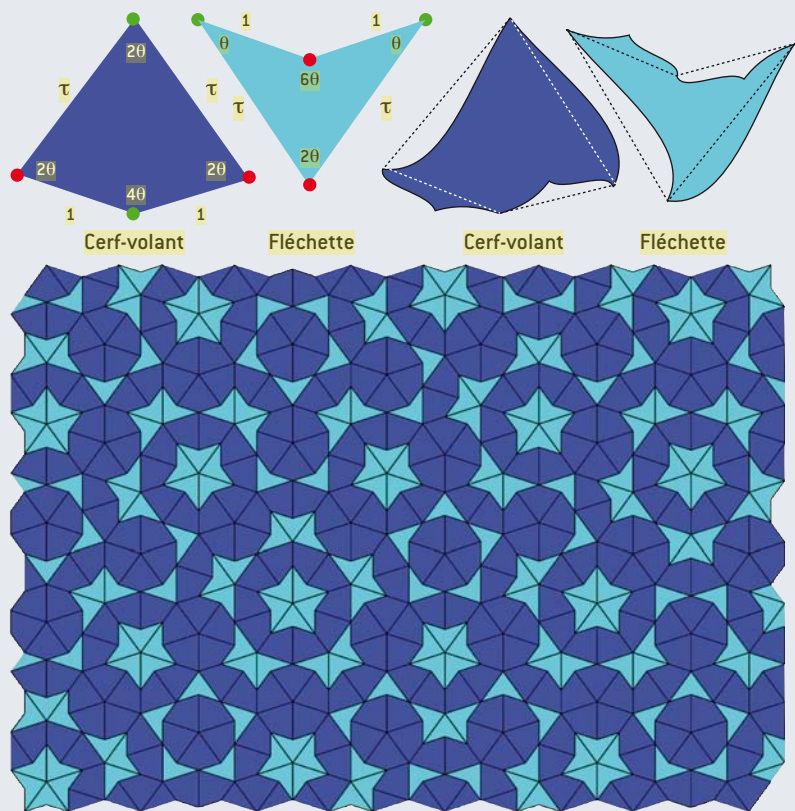
invariant, mais il n'en existe pas même un seul).

– Toute partie finie de tout pavage convenable se retrouve une infinité de fois dans tout autre pavage ; en ce sens, tous les pavages convenables se ressemblent.

– Il existe une infinité non dénombrable de pavages convenables possibles (tous apériodiques) ne se ramenant pas l'un à l'autre.

– Dans tout pavage convenable, il existe des parties finies arbitrairement grandes qui possèdent une symétrie de rotation d'ordre 5 (rotation d'angle $2\pi/5$).

– Dans tout pavage convenable, si l'on prend des disques de plus en plus grands, le rapport entre le nombre de cerfs-volants contenus dans le disque et le nombre de fléchettes tend vers le nombre d'or τ .



simulation de R. Berger que le problème du pavage est indécidable... et qu'il existe donc des ensembles de pavés apériodiques.

N'est-il pas remarquable que la démonstration de l'existence d'ensembles de pavés apériodiques provienne d'une préoccupation théorique concernant la décidabilité algorithmique, théorie que certains pensent sans intérêt pratique ?

Mais on attend des théoriciens qu'ils sachent traduire concrètement leurs préoccupations abstraites. R. Berger, exploitant sa démonstration d'indécidabilité, en a tiré la définition effective d'un ensemble de pavés forçant la non-périodicité. Dans sa thèse,

il construisit un tel jeu de 20 426 formes. Dès lors, on commença à rechercher des jeux de pavés apériodiques comportant un plus petit nombre de formes de base.

R. Berger réduisit ses 20 426 pavés à 104. Donald Knuth (l'informaticien créateur du traitement de texte mathématiques *TeX*) amena alors le record à 92. D'année en année, des ensembles apériodiques plus petits ont été découverts. On passa ainsi à 40 (H. Läuchi en 1966), à 35 (Raphael Robinson en 1967), à 34 (Roger Penrose en 1973), à 16 (Robert Ammann en 1978). En 1971, Robinson découvrit un ensemble de six pavés apériodiques

(voir la figure 3a). La démonstration de l'apériodicité, dans ce cas comme dans bien d'autres, se fait en ajoutant des tracés colorés sur les pavés (voir la figure 3b).

Quand on compose un pavage, ces tracés forment deux systèmes de carrés emboîtés, en orange et en vert (voir la figure 3c). Les carrés ainsi créés sont de taille aussi grande qu'on le veut et on montre que c'est nécessairement le cas pour tout pavage réalisé avec les six pavés de Robinson. Si un pavage périodique était possible avec ces pavés, il y aurait une taille maximale de carrés. Le fait qu'il existe des carrés de taille aussi grande qu'on le veut prouve que tous

Des pavages plus ou moins compliqués

Quasi-périodiques signifie presque périodique et cela suggère une hiérarchie des pavages non périodiques. Un pavage est quasi-périodique si, pour tout motif M qui y apparaît, il existe un entier n tel que M apparaît dans tout motif couvrant un disque de rayon n . Les pavages quasi-périodiques sont donc ceux qui font apparaître tout motif de manière régulière et pas trop espacée. Ils sont un peu moins simples que les pavages périodiques, mais leur désordre reste modéré. Tous les pavages réalisables avec les pavés de Penrose sont quasi-périodiques. Dans le cas de pavages quasi-périodiques de Penrose (photographies ci-dessous), tout motif fini que l'on

trouve dans l'un se retrouve dans tout autre. Il est facile de concevoir des pavages qui ne sont pas quasi-périodiques. C'est par exemple le cas des deux pavages non périodiques à base de triangles ayant une sorte de point central (voir la figure 2). Une question naturelle se pose : puisqu'on peut forcer la non-périodicité, peut-on forcer la non-quasi-périodicité ?

Autrement dit : peut-on trouver un ensemble de pavés qui pavent le plan, mais seulement en dessinant des pavages qui ne sont pas quasi-périodiques (contenant donc une sorte de grand désordre) ? La réponse est négative : si un ensemble de pavés recouvre le plan, alors il peut en particulier le faire de manière quasi-pé-

riodique. Ce beau théorème, que le chercheur français Bruno Durand a établi en 1999, signifie que le type de désordre exprimé par la propriété de non-quasi-périodicité ne peut pas être forcé par des règles locales.

La non-quasi-périodicité est une forme de désordre, mais la non-calculabilité aussi, et cette fois on peut la « forcer ». William Hanf et Dale Myers ont en effet démontré en 1974 qu'il existe des ensembles de pavés qui pavent le plan, mais ne le font que de manière non calculable : aucun algorithme n'indique comment le faire ; pour paver le plan, il faut procéder au hasard et avoir de la chance !

Dans cette veine, un autre résultat a été démontré en 2008 par

B. Durand, Leonid Levin et Alexander Shen. Il pousse à son extrême cette étude du forçage par un ensemble fini de pavés. Son énoncé indique qu'il existe des ensembles de pavés qui forcent une croissance rapide de la complexité des dessins produits par tout pavage.

Tout pavage possible est tel que pour en décrire un motif couvrant un disque de rayon n , il faut un programme de longueur au moins proportionnelle à n (la complexité de Kolmogorov du dessin est au moins proportionnelle à n , c'est-à-dire au moins égale à Cn pour une certaine constante C). Un tel ensemble de pavés force donc une grande complexité des dessins.

