

simulation de R. Berger que le problème du pavage est indécidable... et qu'il existe donc des ensembles de pavés apériodiques.

N'est-il pas remarquable que la démonstration de l'existence d'ensembles de pavés apériodiques provienne d'une préoccupation théorique concernant la décidabilité algorithmique, théorie que certains pensent sans intérêt pratique ?

Mais on attend des théoriciens qu'ils sachent traduire concrètement leurs préoccupations abstraites. R. Berger, exploitant sa démonstration d'indécidabilité, en a tiré la définition effective d'un ensemble de pavés forçant la non-périodicité. Dans sa thèse,

il construisit un tel jeu de 20 426 formes. Dès lors, on commença à rechercher des jeux de pavés apériodiques comportant un plus petit nombre de formes de base.

R. Berger réduisit ses 20 426 pavés à 104. Donald Knuth (l'informaticien créateur du traitement de texte mathématiques *TeX*) amena alors le record à 92. D'année en année, des ensembles apériodiques plus petits ont été découverts. On passa ainsi à 40 (H. Läuchi en 1966), à 35 (Raphael Robinson en 1967), à 34 (Roger Penrose en 1973), à 16 (Robert Ammann en 1978). En 1971, Robinson découvrit un ensemble de six pavés apériodiques

(voir la figure 3a). La démonstration de l'apériodicité, dans ce cas comme dans bien d'autres, se fait en ajoutant des tracés colorés sur les pavés (voir la figure 3b).

Quand on compose un pavage, ces tracés forment deux systèmes de carrés emboîtés, en orange et en vert (voir la figure 3c). Les carrés ainsi créés sont de taille aussi grande qu'on le veut et on montre que c'est nécessairement le cas pour tout pavage réalisé avec les six pavés de Robinson. Si un pavage périodique était possible avec ces pavés, il y aurait une taille maximale de carrés. Le fait qu'il existe des carrés de taille aussi grande qu'on le veut prouve que tous

Des pavages plus ou moins compliqués

Quasi-périodiques signifie presque périodique et cela suggère une hiérarchie des pavages non périodiques. Un pavage est quasi-périodique si, pour tout motif M qui y apparaît, il existe un entier n tel que M apparaît dans tout motif couvrant un disque de rayon n . Les pavages quasi-périodiques sont donc ceux qui font apparaître tout motif de manière régulière et pas trop espacée. Ils sont un peu moins simples que les pavages périodiques, mais leur désordre reste modéré. Tous les pavages réalisables avec les pavés de Penrose sont quasi-périodiques. Dans le cas de pavages quasi-périodiques de Penrose (photographies ci-dessous), tout motif fini que l'on

trouve dans l'un se retrouve dans tout autre. Il est facile de concevoir des pavages qui ne sont pas quasi-périodiques. C'est par exemple le cas des deux pavages non périodiques à base de triangles ayant une sorte de point central (voir la figure 2). Une question naturelle se pose : puisqu'on peut forcer la non-périodicité, peut-on forcer la non-quasi-périodicité ?

Autrement dit : peut-on trouver un ensemble de pavés qui pavent le plan, mais seulement en dessinant des pavages qui ne sont pas quasi-périodiques (contenant donc une sorte de grand désordre) ? La réponse est négative : si un ensemble de pavés recouvre le plan, alors il peut en particulier le faire de manière quasi-pé-

riodique. Ce beau théorème, que le chercheur français Bruno Durand a établi en 1999, signifie que le type de désordre exprimé par la propriété de non-quasi-périodicité ne peut pas être forcé par des règles locales.

La non-quasi-périodicité est une forme de désordre, mais la non-calculabilité aussi, et cette fois on peut la « forcer ». William Hanf et Dale Myers ont en effet démontré en 1974 qu'il existe des ensembles de pavés qui pavent le plan, mais ne le font que de manière non calculable : aucun algorithme n'indique comment le faire ; pour paver le plan, il faut procéder au hasard et avoir de la chance !

Dans cette veine, un autre résultat a été démontré en 2008 par

B. Durand, Leonid Levin et Alexander Shen. Il pousse à son extrême cette étude du forçage par un ensemble fini de pavés. Son énoncé indique qu'il existe des ensembles de pavés qui forcent une croissance rapide de la complexité des dessins produits par tout pavage.

Tout pavage possible est tel que pour en décrire un motif couvrant un disque de rayon n , il faut un programme de longueur au moins proportionnelle à n (la complexité de Kolmogorov du dessin est au moins proportionnelle à n , c'est-à-dire au moins égale à Cn pour une certaine constante C). Un tel ensemble de pavés force donc une grande complexité des dessins.



les pavages du plan réalisables avec les six formes de Robinson sont non périodiques.

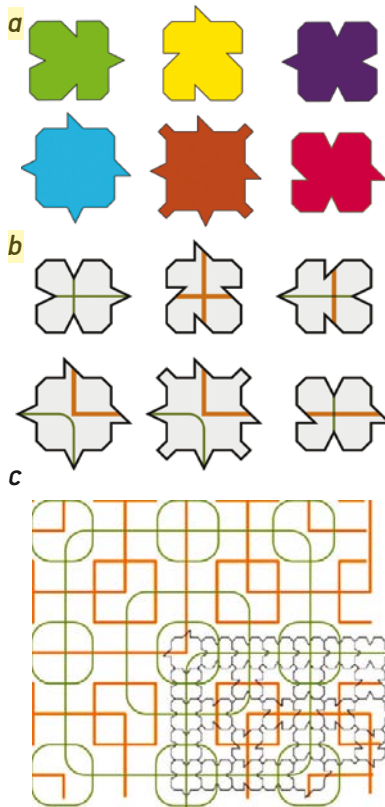
Grâce à R. Penrose, ce bel ensemble de six pavés apériodiques fut d'abord battu par un ensemble de trois pavés, puis par un ensemble de deux pavés (voir l'encadré page 125).

En 1979, R. Penrose, fier de sa découverte, fit breveter les motifs produits par ses pavés apériodiques – une procédure d'appropriation de formes géométriques sur laquelle on peut s'interroger ! En 1997, l'épouse de R. Penrose acheta par hasard des rouleaux de papier hygiénique produits par la firme *Kleenex* dont le motif décoratif était l'un des pavages brevetés. Sans doute furieux de voir sa merveilleuse découverte mathématique chargée d'une tâche indigne, R. Penrose engagea des poursuites contre la firme indélicat. Il gagna. Carl Morris raconte qu'en 2002, un de ses professeurs de mathématiques de l'Université de Cardiff, qui avait pu acheter quelques précieux rouleaux avant leur retrait des magasins, offrait une feuille décorée aux étudiants obtenant les trois meilleures notes à ses examens.

Des pavages aux quasi-cristaux

Les pavages apériodiques ont longtemps été considérés comme une simple curiosité mathématique sans applications autres que ludiques ou esthétiques. Cependant, en 1982, Dan Shechtman, chercheur israélien alors invité à l'Institut américain des normes et de la technologie (le NIST), s'aperçut qu'un alliage d'aluminium et de manganèse produit, quand il est éclairé par des rayons X monochromatiques, des figures de diffraction ayant une symétrie d'ordre cinq, c'est-à-dire analogue à celle d'un pentagone régulier (voir la figure 4). C'était fort étonnant, car aucune structure cristalline périodique ne peut produire de telles figures de diffraction.

Cette découverte des « quasi-cristaux » était si inattendue que le chercheur a eu du mal à publier sa découverte. Finalement admise et confirmée, elle conduira en 1992 à la modification de la définition des cristallins par l'Union internationale de cristallographie, définition qui ne retient que le



3. LES SIX PAVÉS DE ROBINSON (a) ne peuvent construire qu'un pavage apériodique. Pour le prouver, on leur superpose des tracés colorés (b) qui, lorsqu'on assemble les pavés (c), forment des carrés aussi grands que l'on veut.



4. UNE FIGURE DE DIFFRACTION présentant une symétrie d'ordre 5.

caractère discret de la figure de diffraction des rayons X, sans imposer d'ordre aux symétries observées. Et en 2011, D. Shechtman reçut le prix Nobel de physique pour sa découverte.

Les premiers quasi-cristaux étaient tous artificiels, mais en 2009 un quasi-cristal naturel a été découvert dans les montagnes de Koriakie, en Russie. Son origine terrestre ne semble faire aucun doute !

Le lien avec les pavages apériodiques, dont certains sont construits à partir de pavés ayant une symétrie d'ordre 5, ou liés au pentagone régulier (comme c'est le cas pour le pavage *kite-dart* de Penrose à deux pavés), s'est révélé essentiel pour comprendre la nature des quasi-cristaux. Des centaines d'articles scientifiques ont été publiés sur le sujet et, aujourd'hui, tout livre de cristallographie consacre des pages aux quasi-cristaux et aux pavages apériodiques. Parmi les points importants, mentionnons la compréhension que les pavages quasi-périodiques proviennent parfois de la projection de structures périodiques appartenant à des espaces de dimension supérieure.

En informatique, les pavages apériodiques se sont révélés intéressants dans le domaine du graphisme et de la synthèse d'images. Pour engendrer des textures ou pour disposer des séries de nombreux objets dans une image, la solution la plus simple consiste à recopier périodiquement une structure de taille limitée. La répétition périodique, trop visible, donne un aspect peu naturel au résultat (voir la figure 5). D'où l'idée d'utiliser un pavage apériodique qui évite d'avoir à utiliser de l'aléa ou du pseudo-aléa, comme l'ont montré Adrien Peytavié, Éric Galin, Jérôme Grosjean et Stéphane Merillou en 2009.

Forcer l'apériodicité avec un pavé unique ?

Indépendamment des applications à la cristallographie et à l'infographie, une question simple et fondamentale est restée posée depuis la découverte par R. Penrose d'un ensemble de deux pavés forçant la non-périodicité : peut-on forcer la non-périodicité avec un seul pavé ? Ce problème porte le