

les pavages du plan réalisables avec les six formes de Robinson sont non périodiques.

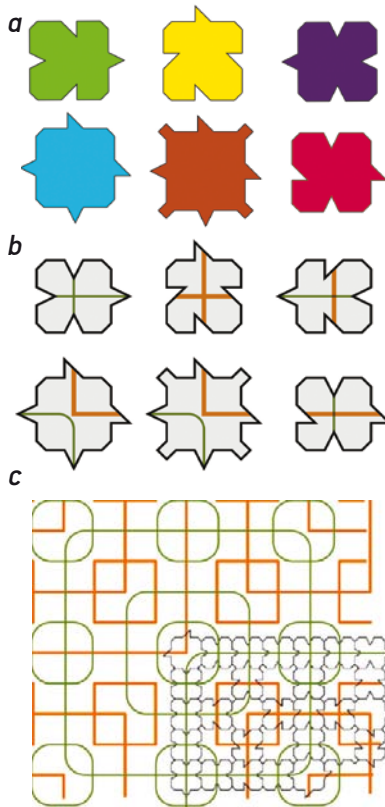
Grâce à R. Penrose, ce bel ensemble de six pavés apériodiques fut d'abord battu par un ensemble de trois pavés, puis par un ensemble de deux pavés (voir l'encadré page 125).

En 1979, R. Penrose, fier de sa découverte, fit breveter les motifs produits par ses pavés apériodiques – une procédure d'appropriation de formes géométriques sur laquelle on peut s'interroger ! En 1997, l'épouse de R. Penrose acheta par hasard des rouleaux de papier hygiénique produits par la firme Kleenex dont le motif décoratif était l'un des pavages brevetés. Sans doute furieux de voir sa merveilleuse découverte mathématique chargée d'une tâche indigne, R. Penrose engagea des poursuites contre la firme indélicate. Il gagna. Carl Morris raconte qu'en 2002, un de ses professeurs de mathématiques de l'Université de Cardiff, qui avait pu acheter quelques précieux rouleaux avant leur retrait des magasins, offrait une feuille décorée aux étudiants obtenant les trois meilleures notes à ses examens.

Des pavages aux quasi-cristaux

Les pavages apériodiques ont longtemps été considérés comme une simple curiosité mathématique sans applications autres que ludiques ou esthétiques. Cependant, en 1982, Dan Shechtman, chercheur israélien alors invité à l'Institut américain des normes et de la technologie (le NIST), s'aperçut qu'un alliage d'aluminium et de manganèse produit, quand il est éclairé par des rayons X monochromatiques, des figures de diffraction ayant une symétrie d'ordre cinq, c'est-à-dire analogue à celle d'un pentagone régulier (voir la figure 4). C'était fort étonnant, car aucune structure cristalline périodique ne peut produire de telles figures de diffraction.

Cette découverte des « quasi-cristaux » était si inattendue que le chercheur a eu du mal à publier sa découverte. Finalement admise et confirmée, elle conduira en 1992 à la modification de la définition des cristallins par l'Union internationale de cristallographie, définition qui ne retient que le



3. LES SIX PAVÉS DE ROBINSON (a) ne peuvent construire qu'un pavage apériodique. Pour le prouver, on leur superpose des tracés colorés (b) qui, lorsqu'on assemble les pavés (c), forment des carrés aussi grands que l'on veut.



4. UNE FIGURE DE DIFFRACTION présentant une symétrie d'ordre 5.

caractère discret de la figure de diffraction des rayons X, sans imposer d'ordre aux symétries observées. Et en 2011, D. Shechtman reçut le prix Nobel de physique pour sa découverte.

Les premiers quasi-cristaux étaient tous artificiels, mais en 2009 un quasi-cristal naturel a été découvert dans les montagnes de Koriakie, en Russie. Son origine terrestre ne semble faire aucun doute !

Le lien avec les pavages apériodiques, dont certains sont construits à partir de pavés ayant une symétrie d'ordre 5, ou liés au pentagone régulier (comme c'est le cas pour le pavage *kite-dart* de Penrose à deux pavés), s'est révélé essentiel pour comprendre la nature des quasi-cristaux. Des centaines d'articles scientifiques ont été publiés sur le sujet et, aujourd'hui, tout livre de cristallographie consacre des pages aux quasi-cristaux et aux pavages apériodiques. Parmi les points importants, mentionnons la compréhension que les pavages quasi-périodiques proviennent parfois de la projection de structures périodiques appartenant à des espaces de dimension supérieure.

En informatique, les pavages apériodiques se sont révélés intéressants dans le domaine du graphisme et de la synthèse d'images. Pour engendrer des textures ou pour disposer des séries de nombreux objets dans une image, la solution la plus simple consiste à recopier périodiquement une structure de taille limitée. La répétition périodique, trop visible, donne un aspect peu naturel au résultat (voir la figure 5). D'où l'idée d'utiliser un pavage apériodique qui évite d'avoir à utiliser de l'aléa ou du pseudo-aléa, comme l'ont montré Adrien Peytavié, Éric Galin, Jérôme Grosjean et Stéphane Merillou en 2009.

Forcer l'apériodicité avec un pavé unique ?

Indépendamment des applications à la cristallographie et à l'infographie, une question simple et fondamentale est restée posée depuis la découverte par R. Penrose d'un ensemble de deux pavés forçant la non-périodicité : peut-on forcer la non-périodicité avec un seul pavé ? Ce problème porte le

nom de « problème *ein stein* » (une pierre en allemand, clin d'œil à Einstein).

En dimension 3, c'est possible, comme Peter Schmitt et John Conway l'ont montré assez facilement au début des années 1990 à l'aide d'un biprisme (voir la figure 6). Chaque couche est périodique, mais en choisissant bien l'angle créé entre les couches (angle déterminé par la forme du biprisme), l'ensemble du pavage de l'espace n'est pas périodique.

En dimension 2, le polygone coloré découvert en 1996 par l'Allemande Petra Gummelt, de l'Université de Greifswald, est une petite merveille assez proche de la solution : il s'agit d'un décagone régulier dont la surface est colorée avec deux couleurs (voir l'encadré ci-contre). On cherche à recouvrir le plan avec le décagone. On autorise les chevauchements, à condition que les parties chevauchantes soient colorées de la même façon, ce qui est une contrainte locale proche de la contrainte de recouvrement sans chevauchement.

Des solutions avec chevauchements

On montre que tout le plan peut ainsi être recouvert et qu'alors, c'est nécessairement de manière aperiodique. Des liens ont été établis entre ce décagone et les pavages de Penrose. De plus, ce décagone est d'une utilité directe pour comprendre certains quasi-cristaux. Malheureusement, les chevauchements autorisés interdisent qu'on le considère comme la solution attendue au problème *ein stein*.

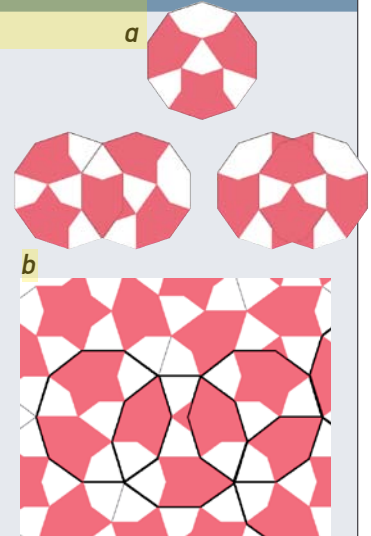
En 2010, Joan Taylor, une habitante de la lointaine Tasmanie (île célèbre pour son loup disparu), après de longs essais s'étalant sur plusieurs années, mit au point un hexagone coloré et des règles locales pour paver le plan avec des copies de cet hexagone. Elle prouva que tout pavage qui respecte les règles est non périodique (voir l'encadré page ci-contre).

Le fait que les règles soient locales a laissé espérer un moment qu'on pourrait, comme pour les tuiles de Penrose, traduire les règles d'assemblage en déformant les côtés de l'hexagone pour obtenir un pavé unique (sans dessin, ni couleur) dont la seule

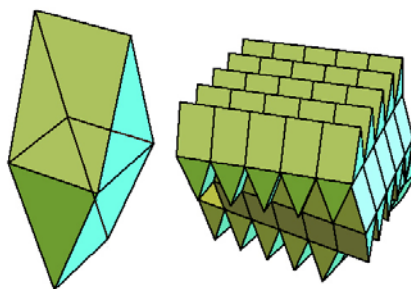
Le polygone de Petra Gummelt

Le polygone coloré de Petra Gummelt est presque une solution de l'énigme du pavé unique aperiodique (problème *ein stein*). C'est bien une forme qui force la non-périodicité, mais, pour l'utiliser, on change un peu les règles du jeu. On cherche à recouvrir le plan (aucun espace ne doit être oublié) par des copies du décagone en s'imposant que les parties colorées de deux décagones qui se chevauchent (dans ce cas, c'est autorisé) soient de la même couleur. Cette règle simple locale force les recouvrements du plan à être non périodiques. C'est un exemple aussi simple que ceux de Penrose (avec lesquels il n'est pas sans liens) de règle locale ayant un effet à l'infini.

Le décagone de Petra Gummelt avec deux façons convenables de faire se chevaucher des copies de ce décagone (a) et un exemple de recouvrement du plan par des copies se chevauchant convenablement (b).



5. UNE TEXTURE FORMÉE avec des éléments disposés périodiquement (en haut) a un aspect peu naturel, contrairement à une disposition aperiodique (en bas).



6. POUR L'ESPACE À TROIS DIMENSIONS, Peter Schmitt et John Conway ont montré qu'avec un biprisme de forme bien choisie, on peut remplir tout l'espace, mais uniquement de façon aperiodique. L'analogie en deux dimensions existe-t-il ?

règle « recouvrir sans chevauchement ni espace vide » forcerait la non-périodicité. Personne n'a réussi cette traduction, que l'on considère maintenant impossible.

Les tentatives de traduction ont tout de même donné deux « quasi-solutions ». La première propose un pavé unique (sans dessin ni couleur) en plusieurs morceaux disjoints considérés comme liés rigidement comme par une force magique, qui pave le plan et ne le fait que de manière aperiodique. La seconde introduit une épaisseur (non constante) et donne une sorte de pavé tridimensionnel qui pave le plan uniquement de façon aperiodique. Ce succès remarquable laisse malheureusement un goût d'inachevé et l'on s'interroge aujourd'hui pour savoir si, en définitive, un « pavé pur » (sans dessin ni couleur) forçant la non-périodicité est possible. Une course est donc lancée entre ceux qui tentent encore de trouver un pavé unique aperiodique et ceux qui tentent de démontrer que ce pavé n'existe pas. ■

Aider la science et simuler le hasard

Une expérience est organisée par l'Algorithmic Nature Group qui réunit des chercheurs français (dont l'auteur de cette rubrique), espagnols, hollandais et mexicains. Le but est d'évaluer l'aptitude des humains à reconnaître et à simuler le hasard. Le